Stockholms Matematiska Cirkel

Grafteori med inriktning på färgläggning

Joar Bagge
Lisa Nicklasson

Institutionen för matematik KTH och
Matematiska institutionen Stockholms universitet
2018–2019

Innehåll

Några ord på vägen

Detta kompendium är skrivet för att användas som kurslitteratur till Stockholms Matematiska Cirkel under läsåret 2018–2019 och består av sju kapitel.

Kompendiet är inte tänkt att läsas enbart på egen hand, utan ska ses som ett skriftligt komplement till undervisningen på de sju föreläsningarna. Alla elever rekommenderas att läsa igenom varje kapitel själv innan föreläsningen. Det är inte nödvändigt att förstå alla detaljer vid den första genomläsningen.

Som de flesta matematiska skrifter på högre nivå är kompendiet kompakt skrivet. Detta innebär att man i allmänhet inte kan läsa det som en vanlig bok. Istället bör man pröva nya satser och definitioner genom att på egen hand exemplifiera. Därmed uppnår man oftast en mycket bättre förståelse av vad dessa satser och deras bevis går ut på.

Till varje kapitel finns ett antal övningsuppgifter. Dessa är ordnade efter ungefärlig svårighetsgrad, vilket markeras med en ($\star$), två ($\star\star$) eller tre ($\star\star\star$) stjärnor. Dessutom har de udda övningarna lösningar längst bak i kompendiet. Syftet med dessa är att eleverna ska kunna lösa dem och på egen hand kontrollera att de förstått materialet. Övningar med jämna nummer saknar facit och kan användas som examination. Det rekommenderas dock att man försöker lösa dessa uppgifter även om man inte examineras på dem. Om man kör fast kan man alltid fråga en kompis, en lärare på sin skola eller någon av författarna. Under årets gång kommer det att finnas övningstillfällen där eleverna kan jobba med uppgifterna, själva eller i grupp, och få hjälp av oss.

Övningarna kan ha många olika möjliga lösningar och det som står i facit bör endast ses som ett förslag.

Några ord om Cirkeln

Stockholms Matematiska Cirkel är en kurs för matematikintresserade gymnasieelever, som arrangeras av Kungliga Tekniska högskolan och Stockholms universitet. Cirkeln startade 1999, då med namnet KTH:s Matematiska Cirkel och i KTH:s ensamma regi. Ambitionen är att sprida kunskap om matematiken och dess användningsområden utöver vad eleverna får genom gymnasiekurser, och att etablera ett närmare samarbete mellan gymnasieskolan och högskolan. Cirkeln skall särskilt stimulera elevernas matematikintresse och inspirera dem till fortsatta naturvetenskapliga och matematiska studier.

Till varje kurs skrivs ett kompendium som distribueras gratis till eleverna. Detta material, föreläsningsschema och övrig information om Stockholms Matematiska Cirkel finns tillgängligt på

`www.math-stockholm.se/cirkel`

Cirkeln godkänns ofta som en gymnasiekurs eller som matematisk breddning på gymnasieskolorna. Det är upp till varje skola att godkänna Cirkeln som en kurs och det är lärarna från varje skola som sätter betyg på kursen. Lärarna är självklart också välkomna till Cirkeln och många har kommit överens med sin egen skola om att få Cirkeln godkänd som fortbildning eller som undervisning.

Vi vill gärna understryka att föreläsningarna är öppna för alla gymnasieelever, lärare eller andra matematikintresserade.

Vi har avsiktligt valt materialet för att ge eleverna en inblick i matematisk teori och tankesätt och presenterar därför både några huvudsatser inom varje område och bevisen för dessa resultat. Vi har också som målsättning att bevisa alla satser som används om de inte kan förutsättas bekanta av elever från gymnasiet. Detta, och att flera ämnen är på universitetsnivå, gör att lärarna och eleverna kan uppleva programmet som tungt, och alltför långt över gymnasienivån. Det bör därför inte ses som ett krav att lärarna och eleverna skall behärska ämnet fullt ut och att lära in det på samma sätt som gymnasiekurserna. Det viktigaste är att eleverna kommer i kontakt med teoretisk matematik och får en inblick i *matematikens väsen*. Vår förhoppning är att lärarna med denna utgångspunkt skall ha lättare att upplysa intresserade elever om Stockholms Matematiska Cirkel och övertyga skolledarna om vikten av att låta både elever och lärare delta i programmet.

Några ord om betygssättning

Då Cirkeln inte är utformad på samma sätt som andra gymnasiekurser i matematik kan betygsättningen bli problematiskt, om samma standard som för ordinarie gymnasiekurser används. Utgångspunkten bör istället vara att eleverna skall få insikt i matematiken genom att gå på föreläsningarna och att eleven gör sitt bästa för att förstå materialet och lösa uppgifterna. Självklart betyder det mycket vad eleverna har lärt av materialet i kursen, men lärarna kan bara förvänta sig att ett fåtal elever behärskar ämnet fullt ut.

Författarna, sommaren 2018

Lista över grekiska alfabetet

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ε	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	my
N	ν	ny
Ξ	ξ	xi
O	o	omikron
Π	π	pi
P	ρ	rho
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	ypsilon
Φ	ϕ	fi
X	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

1 Vad är matematik, egentligen?

Syftet med det här första kapitlet är att redogöra för vad vi menar med matematik. Själva kärnan av matematiken, som vetenskap, är vad vi kallar för *matematiska bevis.* Ett bevis är ett logiskt resonemang, som förklarar varför ett visst påstående är sant. Innan vi går in djupare på detta ska vi gå igenom ett av de mest grundläggande begreppen inom matematik, nämligen *mängder.*

1.1 Mängder

En *mängd* är en samling objekt, som vi brukar kalla *element*. Elementen kan t. ex. vara tal eller bokstäver. Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att helt enkelt räkna upp dess element. Detta gör vi genom att skriva hela listan av element, och omge dessa av parenteser av typen $\{\}$. Till exempel är

$$\left\{1, 2, 78, y, \frac{1}{3}\right\}$$

mängden som består av elementen $1, 2, 78, y$ och $\frac{1}{3}$. Det spelar ingen roll i vilken ordning elementen räknas upp. Vi tar heller inte hänsyn till om ett och samma element räknas upp flera gånger. Till exempel betraktas

$$\{2, 4, 4, 3, 4\},\ \{2, 3, 4, 4, 4\} \text{ och } \{2, 3, 4\}$$

som samma mängd, alltså mängden av de tre elementen $2, 3$ och 4. För en mängd M låter vi $|M|$ beteckna *antalet element* i mängden M. Till exempel är $|\{a, b\}| = 2$. Observera att även $|\{a, a, a, b, b\}| = 2$ eftersom $\{a, a, a, b, b\} = \{a, b\}$.

De två exempel vi nu sett har båda varit ändliga mängder, men mängder kan även vara oändliga. En oändlig mängd kan förstås inte beskrivas genom att vi räknar upp alla elementen, utan vi behöver i stället beskriva elementen. Ibland räcker det att beskriva mängden med ord, och ge den en beteckning. En mängd som vi ofta återkommer till inom matematiken är mängden av alla heltal, och denna har därför fått beteckningen $\mathbb{Z}$. Valet av bokstaven Z kommer från det tyska ordet *Zahl*, som betyder tal. Vissa oändliga mängder kan beskrivas som talföljder. Till exempel kan mängden av alla positiva udda tal skrivas som

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}.$$

De tre punkterna betyder alltså att vi fortsätter att räkna upp talen enligt samma mönster, i all oändlighet.

Vi kan även ha mängder där elementen i sig också är mängder. Mängden

$$M = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{-1, -6, 0\}\}$$

är ett exempel på en sådan mängd. Mängderna $\{1, 2\}, \{2, 3\}$, och $\{-1, -6, 0\}$ är alltså element i mängden M. Däremot är talet 1 *inte* ett element i M.

En mängd som inte innehåller några element alls kallas för *den tomma mängden*, och betecknas $\emptyset$.

Definition 1.1.1. Låt A och B vara mängder. Om alla element i B också finns i A sägs B vara en *delmängd* av A. Detta betecknas $B \subseteq A$.

Till exempel har vi

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Om vi vill poängtera att ett visst element x tillhör en mängd A skriver vi $x \in A$, som utläses "x tillhör A". Till exempel har vi $5 \in \mathbb{Z}$. Ett ytterligare sätt att beskriva en mängd är att beskriva den som en delmängd av en känd mängd, men med något extra villkor på elementen. Mängden av element i en mängd M som uppfyller ett visst villkor skrivs

$$\{x \in M \mid \text{villkor på } x\}.$$

Till exempel kan vi låta

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}.$$

Detta betyder att vi låter A vara mängden av heltal som är mindre än 0, det vill säga de negativa heltalen. Vi kan fortsätta, och låta

$$B = \{x \in A \mid x \text{ är jämn}\}.$$

Mängden B är alltså mängden av alla jämna tal i mängden A, det vill säga alla jämna negativa tal.

Istället för att till vänster ange en mängd våra element ska tillhöra, kan vi ange på vilken form elementen ska vara. Vi har redan nämnt begreppen *udda* och *jämna tal*, vilka läsaren förstås är bekant med. Rent formellt definieras de jämna talen som de tal vilka kan skrivas på formen $2x$, där x är ett heltal. På liknande sätt definieras de udda talen som de tal vilka kan skrivas på formen $2x + 1$, där x är ett heltal. Vi kan då beskriva mängden av jämna tal som

$$\{2x \mid x \in \mathbb{Z}\},$$

och mängden av udda tal som

$$\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Det kan också hända att vi vill slå ihop två mängder. Vi har därför följande definition.

Definition 1.1.2. Låt A och B vara två mängder. Mängden av alla element som tillhör någon av mängderna A och B kallas *unionen* av A och B, och betecknas $A \cup B$. △

Exempel 1.1.3. Låt $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5, 9\}$ och $C = \{7\}$. Då är

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 9\} \text{ och } A \cup C = \{1, 2, 3, 7\}.$$

▲

1.2 Matematisk bevisföring

Denna kurs kommer i huvudsak att handla om att *bevisa* matematiska påståenden, vilket kan vara en omställning från tidigare kurser i matematik. Därför kan det vara på sin plats att förklara vad ett bevis är för något. Till att börja med måste vi vara klara över vad som menas med ett *påstående*. Ett påstående är något som antingen är sant eller falskt. Nedan följer fyra exempel på påståenden

(i) $2 + 3 = 5$,

(ii) $\{a, b, c\} = \{a, b, c, b, c\}$,

(iii) $\pi \in \mathbb{Z}$,

(iv) Vinkelsumman hos en triangel är $180°$.

Vi kan se att de första, andra och fjärde påståendena är sanna. Talet π är som bekant inte ett heltal, så det tredje påståendet är falskt. Följande uttryck

- $1 + 1$
- $\{a, b, c\}$

är *inte* påståenden; de är varken sanna eller falska. Ett *bevis* av att ett påstående är sant är en följd av logiska slutledningar som, utifrån givna förutsättningar, leder fram till slutsatsen att påståendet är sant. Förenklat kan man säga att ett bevis är en förklaring av varför påståendet är sant.

Man kan ha många olika anledningar att tro att ett påstående är sant. Det kan till exempel vara att någon trovärdig person sagt att påståendet är sant, eller att vi tittat på många exempel och inte kunnat hitta något motexempel. Detta är dock inte samma sak som att ha ett bevis för att påståendet är sant. Låt oss betrakta följande påstående.

Påstående 1.2.1. Om y är ett jämnt tal så är $y + 1$ ett udda tal. Om y däremot är ett udda tal så är $y + 1$ jämnt.

De flesta håller säkert med om att påståendet är sant. Den som känner sig osäker kanske testar att addera 1 till några olika heltal, och ser att påståendet verkar stämma. För att verkligen bevisa att påståendet är sant behöver vi använda oss av definitionen av udda och jämna tal, som vi såg tidigare.

Bevis av Påstående 1.2.1. Kom ihåg att de jämna talen är de heltal som kan skrivas på formen $2x$, och att de udda talen är de som kan skrivas på formen $2x + 1$, för heltal x. Antag nu att y är ett jämn tal. Det finns alltså ett heltal x så att $y = 2x$. Då ser vi att $y + 1$ är ett udda tal, eftersom $y + 1 = 2x + 1$.

Antag i stället att y är ett udda tal. Det finns alltså ett heltal x så att $y = 2x+1$. Då är $y + 1 = 2x + 2 = 2(x + 1)$, vilket är ett jämn tal, eftersom $x + 1$ är ett heltal. □

Ett intressant påstående som bevisats vara sant brukar ibland kallas för en *sats*. Vi tittar på ett exempel på en sats med tillhörande bevis.

Sats 1.2.2. *Låt n vara ett positivt heltal. Summan av de n första positiva heltalen är lika med* $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ett annat sätt att formulera påståendet är

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Precis som för mängder tidigare, betecknar punkterna att vi fortsätter räkna upp termer enligt samma mönster, upp till talet n. Om vi till exempel tar $n = 5$, så säger satsen att

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2}.$$

Bevis av Sats 1.2.2. Låt oss beteckna summan av de n första heltalen med x. Vi har alltså

$$x = 1 + 2 + \cdots + n. \tag{1.1}$$

Vi kan också räkna upp termerna i omvänd ordning, utan att förändra värdet på x. D.v.s.

$$x = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1. \tag{1.2}$$

Nu ska vi få ett uttryck för $2x$ genom att addera de båda högerleden i (1.1) och (1.2). När vi lägger ihop de två första termerna i högerleden får vi $1 + n$. När vi lägger ihop de två andra termerna får vi $2 + (n-1) = n+1$. När lägger ihop de tredje termerna får vi $3 + (n-2) = n+1$. Mer generellt ser vi att, om i är något heltal mellan 1 och n, är den i:te termen i högerleden i (1.1) just i. Den i:te termen i högerleden i (1.2) är $n - (i-1)$. När vi lägger ihop dessa två får vi $i + n - (i-1) = n+1$. Uttrycket för $2x$ blir därför

$$2x = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ stycken likadana termer}} = n(n+1).$$

Det följer att $x = n(n+1)/2$, och vi har alltså bevisat att

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad \square$$

1.3 Induktionsbevis

Sist i det här kapitlet ska vi också ta upp en speciell typ av bevis som kallas för *induktionsbevis*. Låt säga att vi har en följd av påståenden $P_1, P_2, P_3, \ldots$, vilka vi vill bevisa. Ett induktionsbevis gå då ut på att

(i) Bevisa att det första påståendet, P_1, är sant,

(ii) Bevisa att om P_k är sant så är även P_{k+1} sant.

Vi ska alltså bevisa att om ett påstående är sant, så är även nästa påstående i följden sant. Om vi bevisat att P_1 är sant följer det då att även nästa påstående, alltså P_2 är sant. Om P_2 är sant följer att även P_3 är sant. Därefter följer att även P_4, P_5, P_6 o.s.v. är sanna. Punkt (i) ovan brukar kallas för *induktionsbas*, och punkt (ii) för *induktionssteg*.

Sats 1.2.2 som vi bevisade tidigare kan även bevisas med induktion. Satsen ska ju gälla för alla positiva heltal n. Vi kan därför betrakta satsen som en följd av påståenden $P_1, P_2, P_3, \ldots$, ett för varje positivt heltal. För varje positivt heltal n är P_n påståendet

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktionsbevis av Sats 1.2.2. Vi ska först bevisa basfallet, alltså att P_1 är sant. Det vill säga, att

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Detta är ju uppenbart sant, och kräver egentligen ingen närmare förklaring. Vi går vidare till induktionssteget. Vi ska då visa att om P_k är sant, så är även P_{k+1} sant. Antag alltså att

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \tag{1.3}$$

för ett positivt heltal k. Vi ska, under denna förutsättning, bevisa att även

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Vi får alltså använda oss av antagandet (1.3). Låt oss addera $k+1$ till båda vänsterled och högerled i (1.3). Då får vi

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1.$$

Eftersom

$$\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

följer det att

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

vilket var det vi ville bevisa. Vi har nu bevisat att P_{k+1} är sant, under förutsättningen att P_k är sant. Eftersom vi också sett att P_1 är sant följer det att även P_2, P_3, P_4, o.s.v. är sanna. Sammantaget har vi nu, med induktion, bevisat Sats 1.2.2. $\square$

Vi fortsätter med ytterligare ett exempel på ett induktionsbevis.

Påstående 1.3.1. För varje heltal $n \geq 0$ är $3^n + 1$ ett jämnt tal.

Bevis. Vi börjar med induktionsbasen. Det första påståendet är att $3^n + 1$ är ett jämnt tal då $n = 0$. Det stämmer, eftersom $3^0 + 1 = 2$ ju är jämnt. Vi går vidare till induktionssteget. Antag att $3^n + 1$ är ett jämnt tal. Vi vill visa att, under denna förutsättning, även $3^{n+1} + 1$ är ett jämnt tal. Notera först att

$$3^{n+1} + 1 = 3(3^n + 1) - 2.$$

Då kan vi använda oss av vårt antagande att $3^n + 1$ är ett jämnt tal. Att $3^n + 1$ är jämnt betyder att det finns ett heltal x så att $3^n + 1 = 2x$. Vi sätter in detta ovan, och får

$$3^{n+1} + 1 = 3 \cdot 2x - 2 = 2(3x - 1).$$

Eftersom $3x + 1$ är ett heltal, då x är ett heltal, är alltså $3^{n+1} + 1$ jämnt.

Eftersom $3^0 + 1$ är jämnt följer det nu att även $3^1 + 1, 3^2 + 1, 3^3 + 1, 3^4 + 1, \ldots$ o.s.v. alla är jämna tal. □

En annan variant av induktionsbevis är att använda sig av de två stegen

(i) Bevisa att det första påståendet, P_1, är sant,

(ii) Bevisa att om $P_1, P_2, \ldots, P_k$ är sant så är även P_{k+1} sant.

I induktionssteget används då alltså *alla* de tidigare påståendena, inte bara det senaste. Detta kallas ibland för *stark induktion*. Om vi bevisat att P_1 är sant följer det att P_2 är sant. Då är både P_1 och P_2 sanna, och det följer att P_3 är sant. Av att P_1, P_2 och P_3 är sanna följer att även P_4 är sant, o.s.v.. Vi avslutar detta kapitel med ett bevis där stark induktion används.

Definition 1.3.2. Ett heltal större än 1, som inte kan uttryckas som en produkt av två mindre, positiva heltal kallas för ett *primtal*. △

Till exempel är talen $2, 3, 5$ och 7 primtal. Däremot är talet 6 inte ett primtal, eftersom $6 = 2 \cdot 3$.

Sats 1.3.3. *Varje heltal större än 1 är antingen ett primtal, eller en produkt av flera primtal.*

Bevis. Vi börjar med att konstatera att 2 är ett primtal, eftersom det inte kan uttryckas som en produkt av några mindre, positiva heltal. Detta är vårt basfall. Låt oss nu anta att alla heltal större än 1, och mindre än eller lika med n, antingen är primtal, eller en produkt av flera primtal. Vi ska visa att även talet $n + 1$ antingen är primtal, eller en produkt av flera primtal. Om $n + 1$ är ett primtal är vi klara. Om $n + 1$ inte är ett primtal är $n + 1 = a \cdot b$, där a och b är några positiva heltal mindre än $n + 1$, enligt definitionen. Vi kan också se att varken a eller b kan vara lika med 1. Om t. ex. $a = 1$ måste ju $b = n + 1$, vilket motsäger att både a och b skulle vara mindre än $n + 1$. Alltså är både a och b heltal större än 1 och mindre än eller lika med n. Enligt vårt induktionsantagande är alltså a antingen ett primtal, eller en produkt av primtal, och samma gäller b. Produkten $a \cdot b$ är då en produkt av flera primtal. Vi kan nu dra slutsatsen att $n+1$ antingen själv är ett primtal, eller en produkt av flera primtal.

Vi har nu bevisat satsen med hjälp av (stark) induktion. □

Övningar

Övning 1.1 ($\star$). Räkna upp elementen i följande mängder.

(i) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$

(ii) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x - 3 < 5\}$

(iii) $C = \{2x \mid x \in B\}$

(iv) $A \cup B$

Övning 1.2 ($\star$). Låt $A = \{-1, 1, 0, 5, v, \{13, 87\}, \{0, 1\}\}$. Vilka av följande mängder är delmängder till A?

$$\begin{aligned} B =& \{v, v, v, 5\} \\ C =& \{-5, 0, 1\} \\ D =& \{13, 87\} \\ E =& \{0, 1\} \\ F =& \{5 + 1\} \\ G =& \{-1, 1, 0, 5, v, \{13, 87\}, \{0, 1\}\} \end{aligned}$$

Övning 1.3 ($\star$). Vilka av följande är påståenden? Vilka av påståendena är sanna?

(i) Ett rött hus.

(ii) Stockholm ligger i Sverige.

(iii) $\dfrac{\sqrt{-2}}{0}$

(iv) $7 \cdot 8 = 64$

(v) $\{5, 3, 5, 5, 5, 2\} \subseteq \{2, 3, 5\}$

Övning 1.4 ($\star\star$). Bevisa följande.

(i) Summan av ett jämnt heltal och ett udda heltal är udda.

(ii) Produkten av två udda tal är udda.

(iii) Produkten av två jämna tal är jämn.

Övning 1.5 ($\star\star$). Är de två mängderna lika (det vill säga innehåller samma element)? Om de är lika, motivera! Om de inte är lika, ge ett exempel på ett element som finns i den ena mängden, men inte i den andra.

(i) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$ och $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 = 27\}$

(ii) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$ och $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^4 = 81\}$

(iii) $\{2x+1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$, och $\{2x-1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

(iv) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$, och $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ och } x \geq 0\}$

(v) $\{2x+1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$, och $\{2x-1 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ och } x \geq 0\}$

Övning 1.6 ($\star$)**.** Beräkna summan av de tvåhundra första positiva heltalen.

Övning 1.7 ($\star\star$)**.** Låt n vara ett positivt heltal. Bevisa att produkten av n stycken udda heltal alltid är udda.

Övning 1.8 ($\star\star$)**.** Låt $n \geq 0$ vara ett heltal. Visa att summan av de n första tvåpotenserna är lika med $2^{n+1}-1$. Alltså,

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Övning 1.9 ($\star\star\star$)**.** Bevisa att för alla heltal n, större än fyra, är $n^2 < 2^n$.

Övning 1.10 ($\star\star\star$)**.** Låt n vara ett positivt heltal. Bevisa att summan av kvadraterna av de n första positiva heltalen är lika med $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, alltså

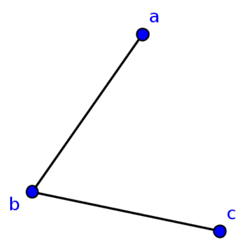
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2 Introduktion till grafteori

Temat för årets cirkel är ju, som titeln anger, *Grafteori med inriktning på färgläggning*. I det här kapitlet kommer vi att introducera begreppet graf, och teorin om dessa. Vi introducerar också begreppet färgläggning av grafer, som ligger till grund för flera av de följande kapitlen.

2.1 Grundläggande definitioner och egenskaper

En *graf* kan beskrivas som en samling punkter, varav vissa par av punkter är sammanbundna av en linje. Det kan till exempel se ut som nedan. Punkterna



Figur 2.1

i en graf kallas för *hörn* (eller *noder*), och linjerna för *kanter* (eller *bågar*). Grafen ovan har hörnen a, b, och c. Hörnen a och b är sammanbundna av en kant, och så är även b och c. En kant i en graf kan alltså identifieras med ett par av punkter; de två punkter som kanten sammanbinder. Rent formellt definieras en graf av två mängder; mängden av hörn och mängden av kanter.

Definition 2.1.1. En *graf* är en uppsättning av två ändliga mängder; en *hörnmängd* $V \neq \emptyset$, och en *kantmängd* E. Elementen i mängden V kallas *hörn*. Elementen i mängden E är mängder som består av två element från V, och kallas *kanter*. Vi skriver $G = (V, E)$ för grafen G med hörnmängd V och kantmängd E. $\triangle$

Bokstäverna V och E kommer från engelskans *vertices* och *edges*.

Figur 2.1 föreställer alltså grafen (V, E) där

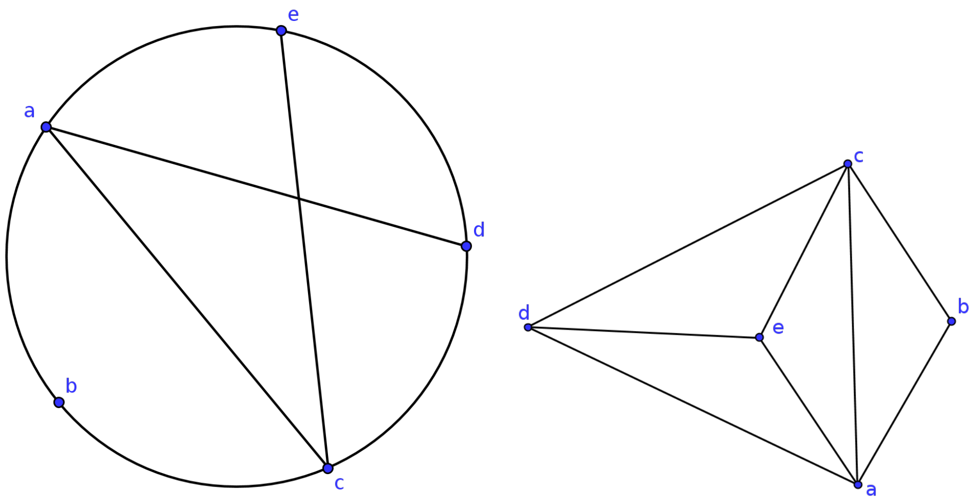
$$V = \{a, b, c\} \quad \text{och} \quad E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}.$$

Observera att vi själva väljer hur hörnen ska placeras ut, när vi ritar upp en graf. Kanterna behöver heller inte vara raka linjer, det enda som spelar roll är vilka två hörn kanten sammanbinder. I Figur 2.2 ser vi till exempel två sätt att rita upp grafen (V, E) med

$$V = \{a, b, c, d, e\} \quad \text{och}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{c, e\}\}.$$

Vi går vidare till två grundläggande definitioner.



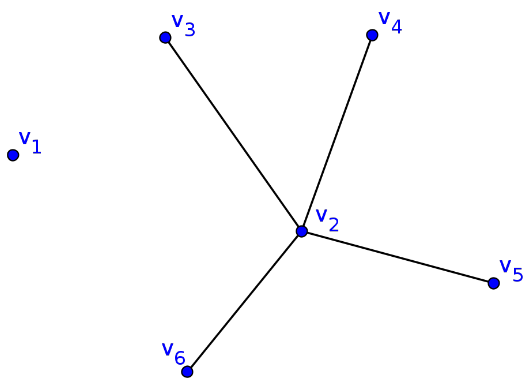
Figur 2.2: Två sätt att rita upp samma graf.

Definition 2.1.2. Låt $G = (V, E)$ vara en graf. Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, d.v.s. om $\{a, b\} \in E$. △

Definition 2.1.3. Låt $G = (V, E)$ vara en graf, och låt a vara ett hörn i G. Antalet grannar till a, d.v.s. antalet $b \in V$ sådana att $\{a, b\} \in E$, betecknas $d(a)$, och kallas för *graden* av a.

Det högsta grad som förekommer för ett hörn i G kallas för den *maximala graden* av G, och betecknas $\Delta(G)$. Den lägsta grad som förekommer för ett hörn i G kallas för den *minimala graden* av G, och betecknas $\delta(G)$. △

Exempel 2.1.4. Låt G vara grafen nedan.



I grafen kan vi till exempel se att hörnen v_2 och v_3 är grannar. Däremot är v_3 och v_4 inte grannar. Hörnet v_1 har inga grannar, medan v_2 har fyra grannar, och v_3, v_4, v_5 och v_6 alla har en granne. Vi har därför

$$d(v_1) = 0,\ d(v_2) = 4,\ \text{och } d(v_3) = d(v_4) = d(v_5) = d(v_6) = 1.$$

Den lägsta grad som förekommer i grafen är alltså 0, och den högsta 4. Därför är

$$\delta(G) = 0 \text{ och } \ \Delta(G) = 4.$$ ▲

Nu är vi redo att bevisa vår första sats.

Sats 2.1.5 (Handskakningslemmat)**.** *Låt* $G = (V, E)$ *vara en graf, och* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$*. Då är*

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Satsen säger alltså att summan av graderna av alla hörn i grafen är dubbelt så stor som antalet kanter i grafen. Om vi tittar på grafen i Exempel 2.1.4 ser vi att den har fyra kanter. Summan av graderna av alla hörnen i grafen blir mycket riktigt

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_6) = 0 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8 = 2 \cdot 4.$$

Bevis. Graden av ett hörn kan beskrivas som antalet kanter vid det hörnet. Summan $d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)$ kan därför beskrivas som att vi går igenom alla hörn i grafen, och summerar antalet kanter vid varje hörn. Varje kant i grafen kommer då att räknas två gånger, en gång för vart och ett av de båda hörn som kanten sammanbinder. Det följer att

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|. \qquad \square$$

Anmärkning 2.1.6. Satsen kallas för *Handskakningslemmat* eftersom den ofta illustreras med följande exempel. Vi tänker oss en graf där hörnen representerar personer på en fest. Vi har en kant mellan två hörn om de två personerna skakat hand. Låt sedan säga att vi frågar varje person på festen hur många de skakat hand med, och summerar talen vi får. Summan kommer då att vara dubbelt så stor som antalet handskakningar som skett på festen.

En sats som används för att bevisa någon annan viktig sats kallas ibland för *lemma* eller *hjälpsats*.

Vissa typer av grafer, som ofta förekommer inom grafteori, har fått egna namn.

Definition 2.1.7. En *stig* är en graf med hörn $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vilka kan numreras på ett sådant sätt att kantmängden är

$$\{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\}.$$

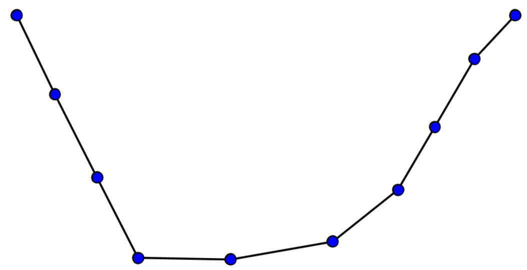
Se Figur 2.3. Antalet kanter i en stig kallas för stigens *längd.* △

Definition 2.1.8. En *cykel* är en graf med minst tre hörn $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vilka kan numreras på ett sådant sätt att kantmängden är

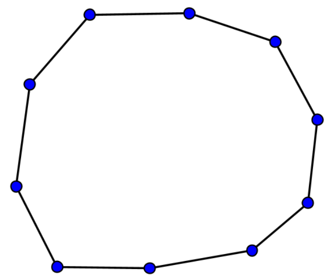
$$\{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{\{v_1, v_n\}\}.$$

Se Figur 2.4. Antalet kanter i en cykel kallas för cykelns *längd.* En *udda cykel* är en cykel vars längd är ett udda tal. △

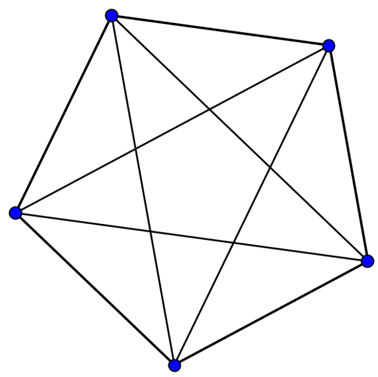
Observera att en cykel alltid har längd minst tre. En stig däremot kan ha längd noll, och består då bara av att enda hörn.



Figur 2.3: En stig av längd nio



Figur 2.4: En cykel av längd tio



Figur 2.5: K^5

Definition 2.1.9. En *komplett graf* är en graf där alla hörn är grannar. Den kompletta grafen med n hörn betecknas K^n. Se Figur 2.5. $\triangle$

Precis som vi kan ha delmängder till mängder, kan vi även ha delgrafer till grafer.

Definition 2.1.10. Låt $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ vara grafer. G_2 sägs vara en *delgraf* av G_1 om $V_2 \subseteq V_1$, och $E_2 \subseteq E_1$. $\triangle$

Observera att E_2 förstås bara kan innehålla kanter som sammanbinder hörn i V_2, annars är inte G_2 en graf. Vi säger också kort att en graf *innehåller* en stig (cykel, komplett graf, ...) om grafen har en delgraf som är en stig (cykel, komplett graf, ...).

Definition 2.1.11. Låt $G_1 = (V_1, E_1)$ vara en graf, och V_2 en delmängd till V_1. Låt E_2 vara den delmängd av E_1 vilken innehåller alla de kanter som sammanbinder hörn i V_2. Grafen $G_2 = (V_2, E_2)$ kallas då *delgrafen inducerad av* V_2. $\triangle$

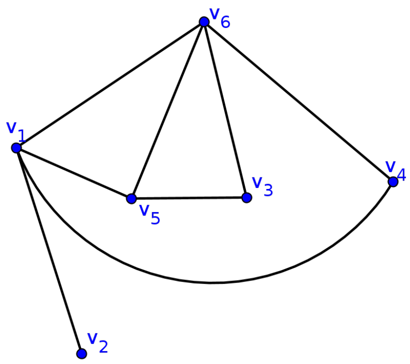
Exempel 2.1.12. Låt $G = (V, E)$ vara grafen i Figur 2.6.

G ges då av

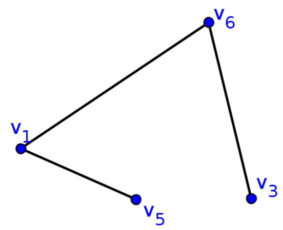
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

och

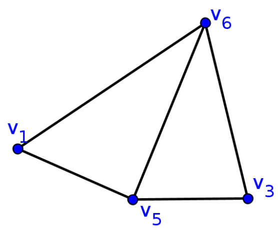
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}\}.$$



Figur 2.6: Grafen G



Figur 2.7: Delgraf av G



Figur 2.8: Delgraf av G

Grafen i Figur 2.7 är en delgraf till G, eftersom den har kantmängd

$$\{\{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_3, v_6\}\} \subseteq E.$$

Detta kan vi förstås se även utan att skriva upp kantmängderna med mängdnotation; kanterna i Figur 2.7 finns även med i G. Däremot är grafen i Figur 2.7 inte delgrafen som induceras av hörnen v_1, v_3, v_5 och v_6. Till exempel kan vi se att v_3 och v_5 är sammanbundna i G, men inte i Figur 2.7. Delgrafen som induceras av hörnmängden $\{v_1, v_3, v_5, v_6\}$ har kantmängd

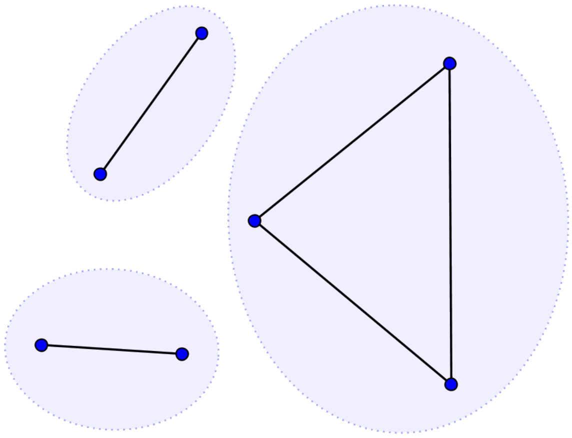
$$\{\{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$$

och visas i Figur 2.8. Vi kan se att alla de kanter som sammanbinder några av v_1, v_3, v_5 och v_6 i G finns med i Figur 2.8. ▲

Definition 2.1.13. En graf kallas *sammanhängande* om för varje par av hörn $u, v \in V$ finns en delgraf som är en stig mellan u och v. △

Graferna vi sett i Figurerna 2.3, 2.4, 2.5 och 2.6 är alla exempel på sammanhängande grafer. Grafen i Exempel 2.1.4 är däremot inte sammanhängande; t. ex. finns ingen stig mellan v_1 och v_2. En graf som inte är sammanhängande kan alltid delas upp i ett antal sammanhängande komponenter.

Definition 2.1.14. Låt $G = (V, E)$ vara en graf, och låt H vara den inducerade delgrafen av en delmängd $U \subseteq V$. Delgrafen H kallas för en *sammanhängande komponent* om den är sammanhängande och för varje hörn i U gäller att alla dess grannar i G också tillhör U. △



Figur 2.9: En graf med tre sammanhängande komponenter

2.2 Färgläggning av grafer

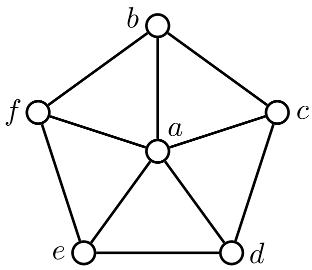
Med en färgläggning menar vi ett sätt att färglägga *hörnen* i en graf, så att hörn som är grannar får olika färger.

Definition 2.2.1. En *färgläggning* av en graf $G = (V, E)$ är ett sätt att tilldela varje hörn i V en *färg*, så att inget hörn har samma färg som någon av sina grannar. △

Anmärkning 2.2.2. Vi skulle kunna byta ut ordet ”färg” mot ”etikett” eller ”märkning” i definitionen ovan; det spelar ingen roll om det är färger eller andra saker vi märker hörnen med.

Notera att det är inbyggt i definitionen att grannar inte får ha samma färg.

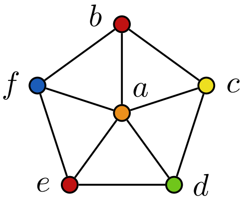
Exempel 2.2.3. I figuren nedan visas en graf med sex hörn.



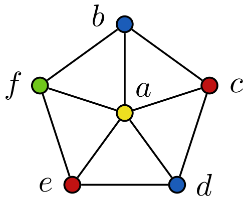
Figur 2.10

I Figur 2.11 visas en färgläggning av denna graf med fem färger. Notera att b och e kan ha samma färg (röd) eftersom de inte är grannar. Däremot kan inget hörn ha samma färg som a (orange) eftersom det hörnet är granne med alla andra hörn. Figur 2.12 visar en annan färgläggning av samma graf med fyra färger.

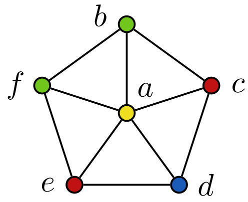
Det som visas i Figur 2.13 är *inte* en färgläggning av grafen (eller: inte en *korrekt* färgläggning), för två hörn som är grannar med varandra har samma färg (b och f är gröna). ▲



Figur 2.11



Figur 2.12



Figur 2.13

Antag att vi vill försöka färglägga en graf med så få färger som möjligt. Vad är det minsta antalet färger som behövs? Frågan kan tyckas oskyldig, men den är inte lätt att besvara för en allmän graf. Till att börja med leder den oss till följande definitioner.

Definition 2.2.4. Låt G vara en graf. Det *kromatiska talet* är det minsta antalet färger som behövs för att färglägga G, och betecknas $\chi(G)$. △

(Ordet *khrôma*, χρῶμα, är grekiska och betyder ”färg”.)

Definition 2.2.5. En färgläggning av en graf G som använder exakt $\chi(G)$ färger kallas en *optimal färgläggning.* △

Att besvara frågan om det minsta antalet färger som behövs är alltså samma sak som att beräkna det kromatiska talet $\chi(G)$ för en graf. Men hur beräknar man $\chi(G)$? Följande exempel visar en typ av resonemang som fungerar för enkla grafer.

Exempel 2.2.6. Vi vill bestämma $\chi(G)$ och hitta en optimal färgläggning för grafen i Figur 2.10. Färgläggningen i Figur 2.11 är uppenbarligen inte optimal eftersom Figur 2.12 visar att man kan använda färre färger. Kan det vara så att färgläggningen i Figur 2.12 är optimal? Vi kan resonera så här:

Hörnet a måste ju ha någon färg, så vi kan färga det gult till exempel. Inget annat hörn kan ha samma färg eftersom de alla är grannar med a, så gult kan inte användas mer. Hörnet b måste alltså ha en annan färg, till exempel blått. Hörnet c kan nu varken vara gult eller blått, så det måste ha en tredje färg, till exempel rött. Minst tre färger behövs alltså. Vi måste nu försöka undvika att använda fler färger. Hörnet d kan inte vara gult eller rött på grund av grannskapet med a och c, men det kan vara blått eftersom d inte är granne med b. Hörnet e kan inte vara gult eller blått, men det kan vara rött. Nu är det bara hörnet f kvar, men det har grannar med alla tre färger vi använt hittills: a är gult, b är blått och e är rött. Hörnet f måste alltså ha en fjärde färg, till exempel grönt. Detta visar att det behövs fyra färger för att färglägga grafen, så $\chi(G) = 4$ och färgläggningen i Figur 2.12 är alltså optimal.
▲

I exemplet ovan kunde vi resonera oss fram till det kromatiska talet för grafen, men för större grafer kan det vara svårt att beräkna $\chi(G)$, och att gå igenom alla möjliga färgläggningar blir snabbt orimligt. I senare kapitel kommer vi därför vara intresserade av att bestämma uppskattningar av $\chi(G)$ under olika förutsättningar.

Anmärkning 2.2.7. För alla grafer $G = (V, E)$ gäller att $\chi(G) \leqslant |V|$, för det kan ju aldrig behövas fler färger än antalet hörn i grafen.

Övningar

Övning 2.1 ($\star$)**.** Rita upp grafen $G = (V, E)$, och ange $\delta(G)$ och $\Delta(G)$, för

(i) $V = \{a, b\}$ och $E = \emptyset$,

(ii) $V = \{a, b\}$ och $E = \{\{a, b\}\}$,

(iii) $V = \{a, b, c\}$ och $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$,

(iv) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ och

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_5\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}\},$$

(v) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ och

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}.$$

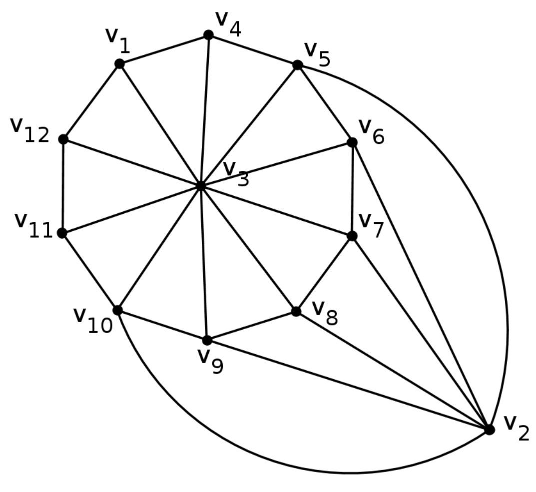
Övning 2.2 ($\star\star$)**.** Finns det en graf med åtta hörn som alla har grad ett? I så fall, ge ett exempel på en sådan. Om inte, förklara varför.

Övning 2.3 ($\star\star$)**.** Finns det en graf med sju hörn som alla har grad tre? I så fall, ge ett exempel på en sådan. Om inte, förklara varför.

Övning 2.4 ($\star\star$)**.** Hur många kanter har den kompletta grafen K^{21}? Mer allmänt, hur många kanter har K^n?

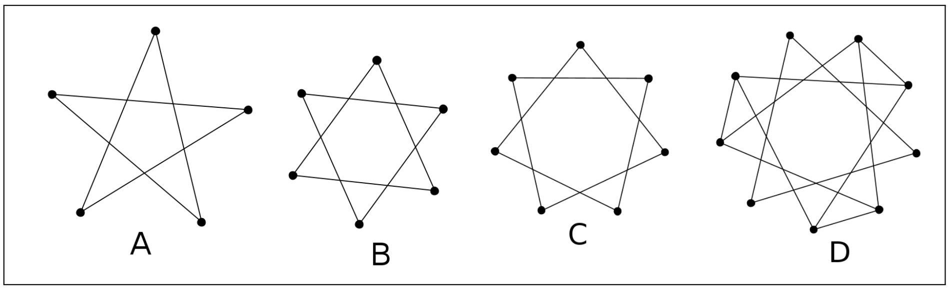
Övning 2.5 ($\star\star\star$)**.** G är en graf med sex hörn och tio kanter. Två av hörnen har grad tre, och tre av hörnen har grad fyra. Vad är $\delta(G)$ och $\Delta(G)$? Rita upp ett exempel på hur G kan se ut.

Övning 2.6 ($\star$)**.** Rita upp delgrafen som induceras av hörnen v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7 och v_9 i Figur 2.14. Är delgrafen sammanhängande?



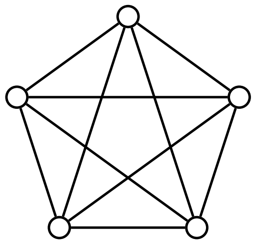
Figur 2.14

Övning 2.7 ($\star$)**.** Vilka av graferna i Figur 2.15 är sammanhängande? Ange antalet sammanhängande komponenter för var och en av graferna.



Figur 2.15

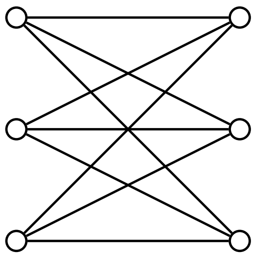
Övning 2.8 ($\star$)**.** Färglägg grafen K^5 i Figur 2.16. Bestäm det kromatiska talet $\chi(K^5)$. Är din färgläggning optimal?



Figur 2.16

Övning 2.9 ($\star$)**.** Bestäm $\chi(K^n)$, för alla positiva heltal n.

Övning 2.10 ($\star$)**.** Färglägg grafen $K_{3,3}$ i Figur 2.17. Bestäm $\chi(K_{3,3})$.



Figur 2.17: $K_{3,3}$

Övning 2.11 ($\star\star$)**.** Låt C vara en cykel. Bevisa att $\chi(C) = 2$ om C:s längd är jämn, och $\chi(C) = 3$ om längden är udda.

Övning 2.12 ($\star\star$)**.** Bevisa att om H är en delgraf av G så är $\chi(H) \leqslant \chi(G)$.

Ledning 1: Påståendet kanske verkar självklart, men försök formulera ett bevis som tydligt baseras på definitionerna i detta kapitel. Relevanta definitioner är till exempel Definition 2.2.4 (kromatiska talet), 2.2.1 (färgläggning), 2.1.2 (grannar) samt 2.1.10 (delgraf).

Ledning 2: Utgå från en optimal färgläggning av G.

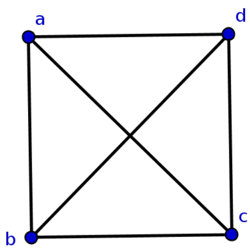
3 Planära grafer

I detta kapitel fördjupar vi oss i en speciell typ av grafer som kallas *planära grafer*. Detta är grafer som kan ritas på en plan yta (till exempel ett papper) utan att kanterna korsar varandra. Vi kommer också titta på färgläggning av kartor och hur det leder till en planär graf.

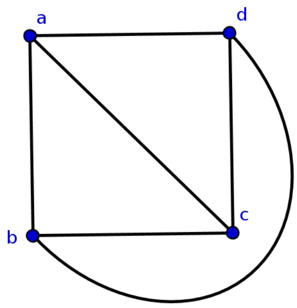
3.1 Eulers formel för planära grafer

Definition 3.1.1. En graf kallas *planär* om den kan ritas upp på en plan yta, på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra. △

Graferna i Figurerna 2.1, 2.3, 2.4 och 2.6 är exempel på planära grafer. Observera att huruvida en graf är planär eller ej, inte beror på hur vi ritat upp grafen, det beror enbart på *om det går* att rita upp grafen på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra. T. ex. är grafen K^4 i Figur 3.1 planär, trots att kanterna $\{a, c\}$ och $\{b, d\}$ skär varandra. Vi kan nämligen rita upp grafen som i Figur 3.2, där inga kanter skär varandra. Ett liknande exempel är även grafen vi såg i Figur 2.2.



Figur 3.1: K^4



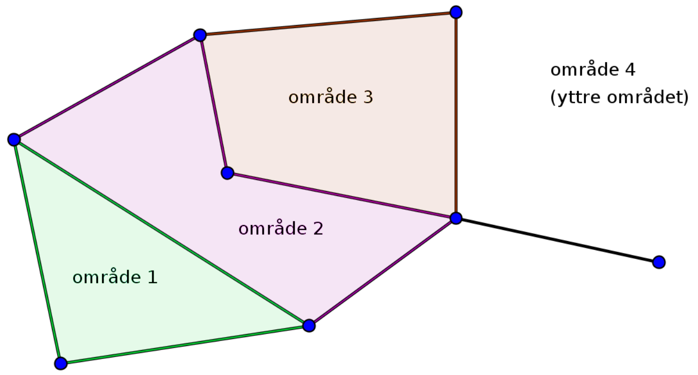
Figur 3.2: K^4

Hur är det då med grafen K^5, som vi såg i Figur 2.5? I figuren har vi ju flera kanter som skär varandra. Men går grafen att rita upp på något annat sätt, så att inga kanter skär varandra? Den som försöker med detta kommer inte att lyckas, grafen K^5 är nämligen inte planär! Beviset av detta kommer i kapitel 4.

När vi ritar upp en planär graf på en plan yta, på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra, delar vi samtidigt in den plana ytan i ett antal *områden*. Se Figur 3.3 för ett exempel. Varje område definieras av ett antal kanter som utgör områdets gränser. Även det ”oändliga området” runt om grafen räknas som ett område. Vi kallar detta område för det *yttre området*.

Hur områdena ser ut beror förstås på hur vi ritar upp grafen. Det blir dock alltid samma *antal* områden, vilket vi ser i nedanstående sats.

Sats 3.1.2 (Euler)**.** *Säg att vi på en plan yta ritat upp en sammanhängande planär graf med v hörn och e kanter, på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra. Låt o vara antalet områden. Då är $v - e + o = 2$.*



Figur 3.3: En planär graf delar in planet i ett antal områden.

Enligt satsen är antalet områden alltså lika med $e - v + 2$. Det betyder att antalet områden enbart beror på antalet hörn och kanter, inte hur vi valt att rita upp grafen.

Bevis. Beviset använder (stark) induktion över e, antalet kanter.

Antag först att $e = 0$, alltså att grafen inte har några kanter. Detta är vårt basfall. Grafen är alltså en sammanhängande graf, utan kanter. Det innebär att grafen endast består av ett enda hörn. Det finns då bara ett enda område, nämligen det yttre området. Vi har alltså $v = 1$ och $o = 1$. Det följer att

$$v - e + o = 1 - 0 + 1 = 2,$$

och vi är därmed färdiga med basfallet.

Vi går vidare till induktionssteget. Antag att satsen är sann för alla grafer där antalet kanter är mindre än eller lika med k, där k är något icke-negativt heltal. Låt $G = (V, E)$ vara en godtycklig sammanhängande planär graf med v hörn och $e = k + 1$ kanter. Vi ska bevisa att satsen då även är sann för grafen G. Låt o vara antalet områden, då vi ritat upp G på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra. Tag en kant $\{a, b\} \in E$, och låt H vara grafen som vi får om vi tar bort kanten $\{a, b\}$. Grafen H har alltså v hörn, precis som G, och $e - 1 = k$ kanter. H är förstås planär, eftersom G är det. Vi behöver nu dela upp beviset i två fall, beroende på om H är sammanhängande eller ej. De två fallen illustreras i Figur 3.4 och Figur 3.5.

Fall 1: H är sammanhängande

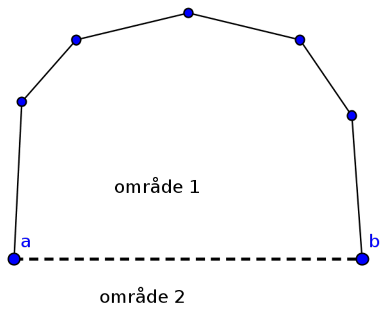
Om H är sammanhängande finns en stig mellan a och b. Vi ser då att det måste vara olika områden på vardera sida om kanten $\{a, b\}$ i G. När vi tar bort kanten $\{a, b\}$ slås dessa två områden ihop till ett enda område. Grafen H har därför $o - 1$ områden, ett mindre än G. Eftersom H är en sammanhängande planär graf med $e - 1 = k$ kanter gäller att

$$v - (e - 1) + (o - 1) = 2.$$

Eftersom

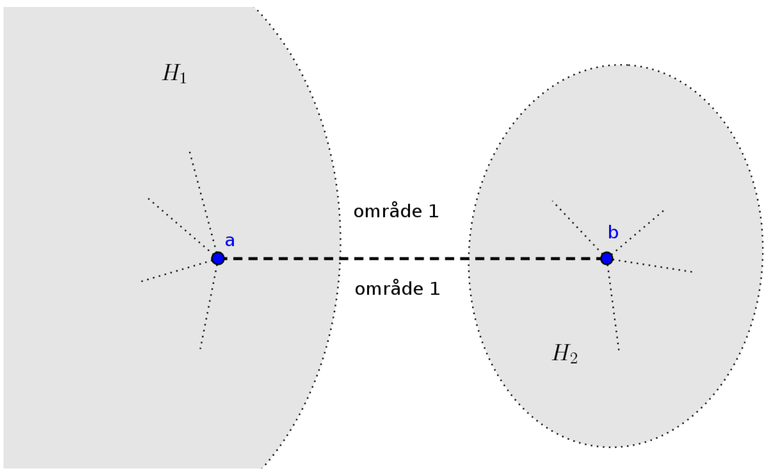
$$v - (e - 1) + (o - 1) = v - e + o$$

är $v - e + o = 2$.



Figur 3.4: Fall 1 i beviset av Sats 3.1.2

Fall 2: H är inte sammanhängande
I det här fallet har vi samma område på båda sidor om kanten $\{a, b\}$. Om det vore olika områden skulle nämligen gränsen mot något av områdena utgöra en stig mellan a och b, och då skulle H vara sammanhängande. Låt oss kalla detta område för "område 1". Antalet områden i H är därför o, samma som hos G. Eftersom H inte är sammanhängande kan vi inte använda induktionsantagandet direkt på H. I stället kan H delas upp i två sammanhängande delgrafer, en som innehåller a, och en som innehåller b. Låt oss kalla dessa delgrafer för H_1 och H_2. Låt v_1, e_1, o_1 beteckna antalet hörn, kanter, och områden i H_1, och v_2, e_2, o_2 motsvarande för H_2. Notera att $v_1 + v_2$ är antalet hörn i G. Antalet kanter i G är $e_1 + e_2 + 1$, eftersom G även har kanten $\{a, b\}$. Antalet områden i



Figur 3.5: Fall 2 i beviset av Sats 3.1.2

G är $o_1 + o_2 - 1$, eftersom "område 1" räknas två gånger i $o_1 + o_2$. Vi har alltså

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2, \\ e &= e_1 + e_2 + 1, \\ o &= o_1 + o_2 - 1. \end{aligned}$$

Eftersom H_1 och H_2 båda är sammanhängande planära grafer med högst k kanter följer det av induktionsantagandet att

$$v_1 - e_1 + o_1 = 2, \quad \text{och} \quad v_2 - e_2 + o_2 = 2.$$

Vi har därför

$$\begin{aligned} v - e + o &= (v_1 + v_2) - (e_1 + e_2 + 1) + (o_1 + o_2 - 1) \\ &= (v_1 - e_1 + o_1) + (v_2 - e_2 + o_2) - 2 = 2 + 2 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Vi har nu visat att $v - e + o = 2$ gäller för grafer med $k+1$ kanter, förutsatt att det gäller för alla grafer med färre antal kanter. Detta slutför induktionsbeviset, och vi har alltså bevisat satsen. $\square$

3.2 Färgläggning av kartor

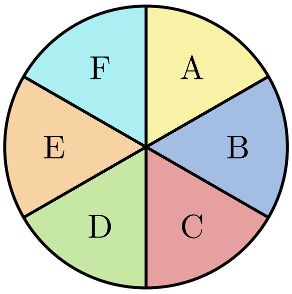
Vi ska nu gå över till ett lite annorlunda problem, nämligen att färglägga en karta. Vi tänker oss en karta över länder eller områden, till exempel kartan i Figur 3.6 över Slovakien och dess grannländer.[1] Vi vill färglägga länderna på kartan så att inget land har samma färg som något av sina grannländer. Problemet kanske känns igen från delkapitel 2.2, men nu är det länder i en karta som ska färgläggas snarare än hörn i en graf.

Figur 3.6

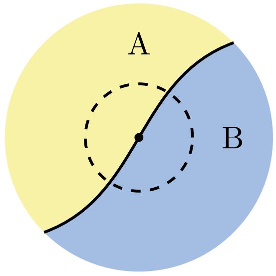
Vad betyder det egentligen att två länder är grannländer med varandra? Vi skulle kunna säga att grannländer är länder som har en gemensam gränslinje,

[1] Kartan är baserad på en bild av användaren `maix` på Wikimedia Commons och publicerad under licensen CC BY-SA.
`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blank_map_of_Europe.svg`

men hur är det med länderna i Figur 3.7? De möts ju alla i mitten av kartan; betyder det då att de alla är grannländer med varandra? Nedanstående definition är lite krånglig men ger oss en tydlig bild av vad vi menar med grannländer.



Figur 3.7



Figur 3.8

Definition 3.2.1. Två länder är *grannländer* om det finns en punkt sådan att om man ritar en tillräckligt liten cirkel kring punkten så omsluter cirkeln bara områden från de två länderna, inga andra områden (se Figur 3.8). △

(Ett annat sätt att uttrycka detta är att om man ”zoomar in” på punkten så ser man till slut bara de två länderna, inga andra områden.)

Enligt denna definition är alltså A exempelvis granne med B och F i Figur 3.7, men inte med C, D eller E.

Om vi färglägger kartan i Figur 3.6 skulle det alltså kunna se ut som i Figur 3.9. Här har Polen och Österrike fått samma färg, vilket går eftersom de inte är grannländer med varandra. Om vi ville skulle vi till exempel också kunna ge Ungern och Tjeckien samma färg, och därmed minska det totala antalet färger vi använder.

Figur 3.9

Baserat på den här typen av problem uppfann matematikern Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898), bättre känd som Lewis Caroll (författare till boken *Alice* *i Underlandet*) följande spel. Spelare A hittar på en karta med länder, och spelare B ska färglägga kartan så att grannländer har olika färger. Målet för spelare A är att göra en komplicerad karta som kräver många färger, medan målet för spelare B är att använda så få färger som möjligt.

En intressant fråga i sammanhanget är hur många färger som egentligen behövs för att färglägga en given karta, d.v.s. det minsta antalet färger. Läsaren kanske kommer ihåg att vi ställde oss motsvarande fråga i delkapitel 2.2 och definierade det kromatiska talet för en graf. Vi skulle nu vilja kunna föra tillbaka vårt problem med kartan till motsvarande problem för en graf.

Från kartor till grafer

Att skala bort onödiga detaljer och därmed komma närmare problemets kärna är en vanlig strategi inom matematiken som kallas *abstraktion*. Detta kan också leda till att man hittar samband mellan olika problem som man från början kanske inte trodde hade något gemensamt.

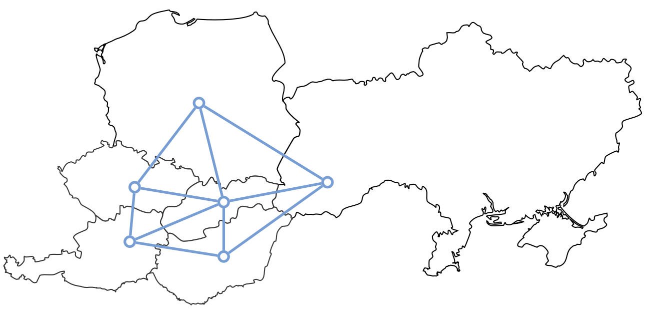
I färgläggningsproblemet spelar till exempel ländernas exakta form ingen roll; det enda som spelar roll är vilka länder som är grannar med varandra. Den informationen kan vi representera med en graf, på följande sätt.

Definition 3.2.2. Givet en karta med sammanhängande länder, låt varje land på kartan motsvara ett hörn i en graf, och låt det gå en kant mellan två hörn i grafen om de motsvarande länderna på kartan är grannländer. Den graf som fås kallar vi *granngrafen* för kartan. △

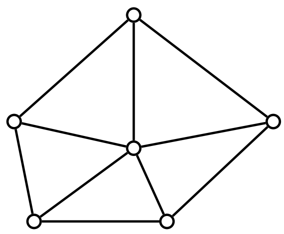
(*Sammanhängande land* betyder här att man kan gå mellan vilka två punkter som helst i landet utan att lämna landet. Alla länder i Figur 3.6 är sammanhängande, medan exempelvis Ryssland inte är sammanhängande eftersom området kring Kaliningrad är separerat från resten av Ryssland.)

Vi kan också definiera granngrafen mer formellt som den graf $G = (V, E)$ där V är mängden av länder i kartan, och $\{a, b\} \in E$ för $a, b \in V$ då a och b är grannländer.

Exempel 3.2.3. Betrakta igen kartan i Figur 3.6. För att hitta granngrafen ritar vi ett hörn för varje land och binder samman de länder som är grannar, som i Figur 3.10. Själva granngrafen visas i Figur 3.11. Detta är samma graf som vi i Figur 2.12 visade har $\chi(G) = 4$, så fyra färger räcker för att färglägga kartan. Poängen är att vi inte behöver bry oss om de komplicerade gränserna i den ursprungliga kartan; granngrafen innehåller allt vi behöver veta. ▲



Figur 3.10

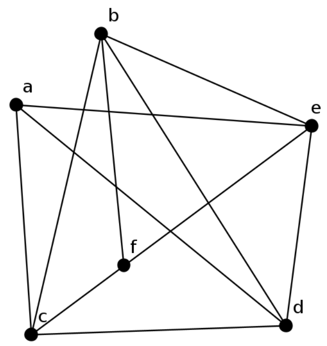


Figur 3.11

Notera att granngrafen för en karta med sammanhängande länder alltid är en planär graf, förutsatt att kartan själv kan ritas på en plan yta (se Övning 3.7).

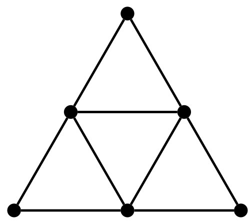
Övningar

Övning 3.1 ($\star$)**.** Visa att grafen i Figur 3.12 är planär.



Figur 3.12

Övning 3.2 ($\star$)**.** Grafen i Figur 3.13 är ju planär och sammanhängande. Kontrollera att Eulers formel, d.v.s. Sats 3.1.2, gäller för grafen.



Figur 3.13

Övning 3.3 ($\star\star$)**.** En sammanhängande graf som inte innehåller någon cykel kallas för ett *träd*. Träd är alltid planära. En graf vars sammanhängande komponenter alla är träd kallas för en *skog*. Hur många kanter finns i en skog som består av 100 träd, och totalt har 2000 hörn?

Övning 3.4 ($\star\star\star$)**.** Ett hörn av grad ett, i ett träd, kallas för ett *löv*. Låt T vara ett träd. Bevisa att T har minst $\Delta(T)$ löv.

Övning 3.5 ($\star$)**.** Figur 3.14 (nästa sida) visar en karta med sju länder i västra Europa. Rita upp granngrafen G för kartan. Bestäm det kromatiska talet $\chi(G)$ och färglägg granngrafen med det minsta möjliga antalet färger.

Övning 3.6 ($\star\star$)**.** Rita en (påhittad) karta som har grafen i Figur 3.12 som granngraf.

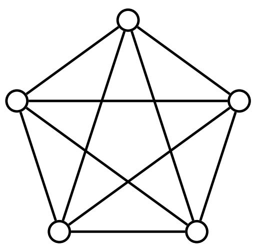
Övning 3.7 ($\star\star$)**.** Bevisa att granngrafen för en plan karta med sammanhängande länder alltid är en planär graf.

Ledning: Låtsas att hörnen är huvudstäderna i respektive land och att kanterna är vägar som går mellan huvudstäder i grannländer. Dra vägarna (kanterna)

Figur 3.14

så att de inte passerar genom något annat tredje land. Hur kan man lösa situationen att två vägar skulle korsa varandra?

Övning 3.8 ($\star\star\star$)**.** I kapitel 4 kommer vi visa att grafen K^5 i Figur 3.15 *inte* är planär. Visa nu att om man tar bort en enda kant (vilken som helst) från K^5 så blir grafen planär. Rita en (påhittad) karta som har denna planära graf som granngraf.



Figur 3.15

Övning 3.9 ($\star\star\star$)**.** I boken *Euler's Gem* av Richeson finns följande berättelse: Det var en gång en kung i Indien som hade ett stort rike och fem söner. Kungen ville att efter hans död skulle riket delas upp mellan hans söner så att varje sons territorium skulle vara granne med var och en av de andra fyra brödernas territorium. Var detta möjligt, och i så fall, hur delades riket in?

Övning 3.10 ($\star\star$)**.** Om kungen i Övning 3.9 hade haft sex arvtagare istället för fem, hade svaret blivit annorlunda? Förklara!

4 Färgläggning av planära grafer

I föregående kapitel frågade vi oss vilket det minsta antalet färger är som krävs för att färglägga en karta på ett sådant sätt att grannländer alltid har olika färg. Denna fråga ställde sig även matematikstudenten Francis Guthrie år 1852, då han observerade att en karta över Englands grevskap (counties) kunde färgläggas med endast fyra färger. Guthrie förmodade att detta gällde alla kartor, alltså att det i allmänhet krävs högst fyra färger för att färglägga en karta. Att bevisa (eller motbevisa) påståendet visade sig dock vara allt annat än enkelt. Det dröjde ända till 1976 innan de två matematikerna Kenneth Appel och Wolfgang Haken till slut lyckades bevisa satsen. Problemet hade under tiden väckt stort intresse, så man skulle kunna tro att Appel och Haken blev hyllade för sitt resultat. Så var dock inte fallet, i stället möttes de av stor skepsis. Anledningen var att deras bevis till stor del byggde på datorberäkningar, så omfattande att det är praktiskt omöjligt för en människa att själv kontrollera beviset. Vi får komma ihåg att tillgången till datorer på 1970-talet var begränsad, och att använda dator i ett matematiskt bevis ansågs kontroversiellt. Dessutom finns det något otillfredsställande med att inte själv kunna överskåda beviset. Appel och Hakens bevis har senare kontrollerats av oberoende datorprogram, och över tid blivit allmänt accepterat. Beviset har även kunnat effektiviseras något, men det finns ännu inget bevis som inte förlitar sig på datorns hjälp. I termer av grafteori formuleras satsen som nedan.

Sats 4.0.1 (Fyrfärgssatsen)**.** *Varje planär graf kan färgläggas med fyra eller färre färger.*

Vi kan också säga att om G är en planär graf så är $\chi(G) \leq 4$. Av förklarliga skäl kommer vi inte att återge beviset här. I stället får vi nöja oss med att bevisa den något svagare *Femfärgssatsen*. För att göra detta behöver vi först studera planära grafer lite närmare.

4.1 Mer om planära grafer

Kom ihåg att en planär graf är en graf som kan ritas upp på en plan yta på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra. En sådan figur delar samtidigt upp planet i ett antal områden. Antalet områden är oberoende av hur vi ritar upp grafen (så länge inga kanter skär varandra), vilket vi såg i Sats 3.1.2.

Hjälpsats 4.1.1. *Säg att vi på en plan yta ritat upp en sammanhängande planär graf med e kanter, på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra. Låt o vara antalet områden. Om det finns någon cykel i grafen, låt c vara längden av den kortaste cykeln. Då är $co \leq 2e$.*

Bevis. Vi antar att det finns minst en cykel i grafen. Det innebär att det finns minst ett område, utöver det yttre området. Varje område definieras av ett antal kanter, vilka bildar en cykel. Låt oss kalla längden av en sådan cykel för områdets *omkrets*. Eftersom c är längden av den kortaste cykeln har varje område omkrets minst c. Observera att detta även gäller det yttre området (även om ordet *omkrets* kanske är något missvisande i det fallet). Låt E' vara mängden av kanter som utgör en (del av en) gräns mellan två områden, och låt $e' = |E'|$. Då är $e' \leq e$. Låt s vara summan av omkretsarna av alla de olika områdena. Eftersom varje område har omkrets minst c, och det finns o områden, är $s \geq co$. När vi summerar omkretsarna räknar vi varje kant i E' två gånger, eftersom varje kant i E' har ett område på vardera sida om sig. Alltså är $s = 2e' \leq 2e$. Vi har nu $co \leq s \leq 2e$, och alltså $co \leq 2e$. □

Sats 4.1.2. *Varje planär graf har ett hörn av grad fem eller lägre.*

Bevis. Låt säga att vi har en planär graf med v hörn, $h_1, h_2, \ldots, h_v$, och e kanter. Låt o vara antalet områden då vi ritat upp grafen på en plan yta, på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra. Vi ska bevisa satsen med ett motsägelsebevis. Vi antar därför att alla hörn i grafen har grad minst sex, vilket kommer att leda till en motsägelse. Från Sats 2.1.5 får vi då

$$2e = d(h_1) + d(h_2) + \cdots + d(h_v) \geq \underbrace{6 + 6 + \cdots + 6}_{v \text{ termer}} = 6v,$$

vilken kan förenklas till $e \geq 3v$.

Enligt Övning 4.6 är $2e \geq 3o$. Vi har också $o = 2 - v + e$, enligt Sats 3.1.2, vilket ger $2e \geq 3(2 - v + e)$. Detta kan i sin tur förenklas till $e \leq 3(v - 2)$.

Sammantaget har vi nu $3v \leq e \leq 3(v - 2)$, vilket medför $3v \leq 3(v - 2)$, eller förenklat $v \leq v - 2$. Detta är förstås en motsägelse, vilket slutför vårt bevis. Det kan alltså inte vara så att alla hörn i en planär graf har grad sex eller högre. Därmed kan vi dra slutsatsen att det finns åtminstone ett hörn som har grad fem eller lägre. □

Dessa två egenskaper hos planära grafer kan vi använda för att bevisa Femfärgssatsen. Men innan vi gör det ska vi bevisa att den kompletta grafen K^5 inte är planär, så som utlovades i kapitel 2.

Sats 4.1.3. *Grafen K^5 är inte planär.*

Bevis. Grafen K^5 har fem hörn och tio kanter (se Figur 2.5). Den kortaste cykeln i K^5 har längd tre. Om K^5 vore planär skulle vi kunna rita upp grafen på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra. Låt o vara antalet områden i en sådan figur. Då skulle $5 - 10 + o = 2$, d.v.s. $o = 7$, enligt Sats 3.1.2. Enligt Hjälpsats 4.1.1 skulle då $3 \cdot 7 \leq 2 \cdot 10$, d.v.s. $21 \leq 20$, vilket ju är falskt. K^5 kan alltså omöjligen vara planär. □

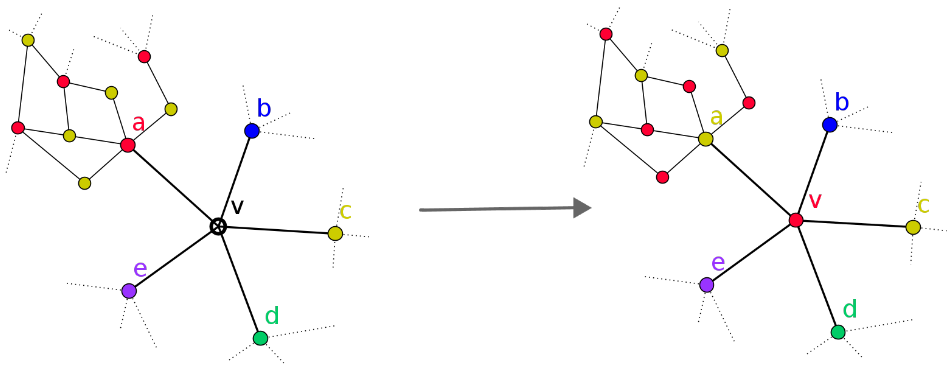
4.2 Femfärgssatsen

Sats 4.2.1 (Femfärgssatsen)**.** *Varje planär graf kan färgläggas med fem eller färre färger.*

Bevis. Vi bevisar satsen med induktion över antalet hörn. Basfallet är alltså då vi har ett enda hörn i grafen. För att färglägga en sådan graf räcker det förstås med en enda färg. Vi går vidare till induktionssteget. Antag att satsen är sann för planära grafer med n hörn. Vi ska bevisa att satsen då även är sann för en graf G med $n+1$ hörn. Enligt Sats 4.1.2 finns ett hörn v av grad fem eller lägre. Vi föreställer oss nu att vi tar bort hörnet v, och alla kanter vid v, från grafen. Då får vi en planär graf med n hörn. Enligt induktionsantagandet kan denna graf färgläggas med fem färger. Vi vill nu sätta tillbaka hörnet v, och de tillhörande kanterna, och färglägga detta för att få en färgläggning av den ursprungliga grafen G. Om grannarna till v har färglagts med färre än fem färger finns det alltså en ledig färg att färglägga v med, och vi är klara. Problemet som återstår att är att behandla fallet då v har exakt fem grannar, som alla har olika färg. Låt oss kalla v:s grannar för a, b, c, d och e, och säg att de fått färgerna röd, blå, gul, grön och lila (i den ordningen). Låt U vara mängden av hörn som fått färgen röd eller gul, och låt H vara delgrafen inducerad av U. Hörnet a har färgen röd, och c färgen gul, så dessa två hörn tillhör U. Vi ska nu dela upp beviset i två fall, beroende på om a och c tillhör samma sammanhängande komponent i H eller inte.

Fall 1: Hörnen a och c ligger i olika sammanhängande komponenter i H

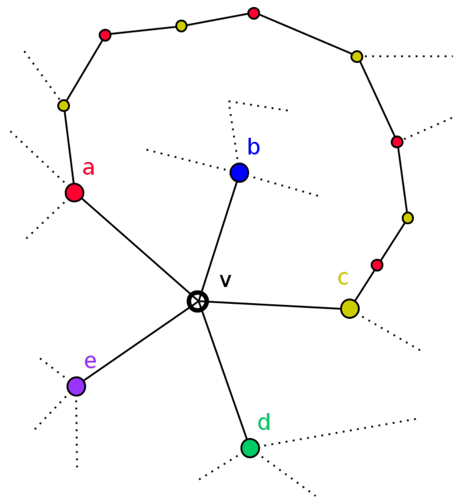
Beviset illustreras i Figur 4.1. Låt oss byta färg på alla hörn i den sammanhängande komponent som a tillhör, så att röda hörn blir gula, och gula hörn blir röda. Observera att detta fortfarande är en tillåten färgläggning av H, med samma antal färger. Nu har a alltså färgen gul. Hörnet c påverkas inte, eftersom det ligger i en annan komponent, och är alltså fortfarande gult. Nu kan vi ge v färgen röd, och på så sätt har vi färglagt G med fem färger.



Figur 4.1: Illustration av fall 1 i beviset av Femfärgssatsen

Fall 2: Hörnen a och c ligger i samma sammanhängande komponent i H

Beviset illustreras i Figur 4.2. Antag att vi ritat upp grafen på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra. Eftersom a och c ligger i samma komponent finns en stig mellan a och c som enbart har röda och gula hörn. Denna stig bildar, tillsammans med v och kanterna $\{a, v\}$ och $\{c, v\}$ en cykel C. Då kan det inte finnas någon stig mellan b och d med enbart blå och gröna hörn. En sådan stig skulle ju behöva korsa C, med vi har ritat upp grafen på ett sådant sätt att inga kanter korsar varandra. Låt nu U' vara mängden av blå och gröna hörn, och H' grafen inducerad av U'. Att det inte finns någon stig mellan b och d med enbart blå och gröna hörn är samma sak som att b och d tillhör olika sammanhängande komponenter i H'. Vi kan nu fortsätta på samma sätt



Figur 4.2: Illustration av fall 2 i beviset av Femfärgssatsen

som i Fall 1, och få en färgläggning av G med enbart fem färger.

Vi är nu färdiga med induktionssteget, och har därmed bevisat satsen. □

Övningar

Övning 4.1 ($\star$)**.** Använd Fyrfärgssatsen för att bevisa att den kompletta grafen K^5 inte är planär.

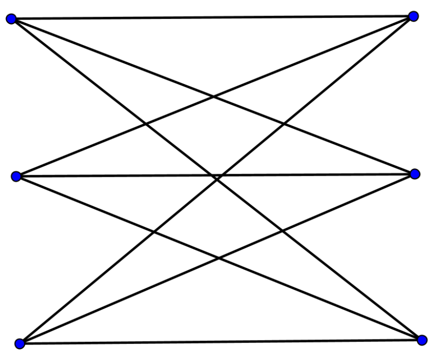
Övning 4.2 ($\star\star\star$)**.** Är grafen $K_{3,3}$ i Figur 4.3 planär? Motivera!

Övning 4.3 ($\star\star$)**.** Är grafen i Figur 4.5 planär? Motivera!

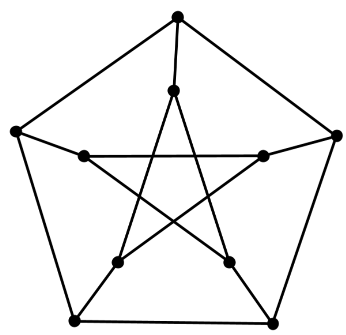
Övning 4.4 ($\star\star$)**.** Är grafen i Figur 4.6 planär? Motivera!

Övning 4.5 ($\star\star\star$)**.** Är grafen i Figur 4.7 planär? Motivera!

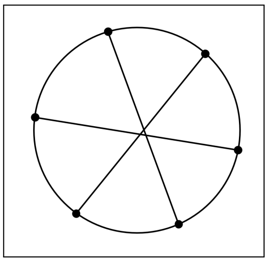
Övning 4.6 ($\star\star$)**.** Låt säga att vi har en planär graf med e kanter, där $e \geq 2$. Låt o vara antalet områden, då vi ritat upp grafen på en plan yta på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra. Bevisa att $2e \geq 3o$.



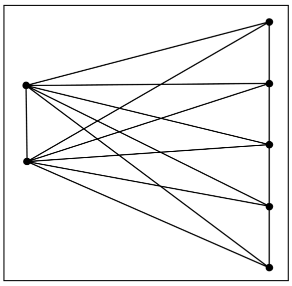
Figur 4.3: $K_{3,3}$



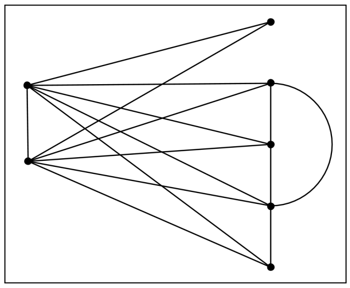
Figur 4.4: Petersengrafen



Figur 4.5



Figur 4.6



Figur 4.7

Övning 4.7 ($\star\star\star$)**.** Bevisa ”Sexfärgssatsen” (Varje planär graf kan färgläggas med sex eller färre färger.) utan att använda Fyrfärgssatsen eller Femfärgssatsen.

Övning 4.8 ($\star$)**.** Ge ett exempel på en graf som inte är planär, men som ändå kan färgläggas med fyra färger.

Övning 4.9 ($\star$)**.** Vi har nu sett Sexfärgssatsen, Femfärgssatsen och Fyrfärgssatsen. Finns det en Trefärgssats? Motivera!

Övning 4.10 ($\star\star$)**.** Är Petersengrafen i Figur 4.4 planär? Motivera!

5 Färgläggning av allmänna grafer

I detta kapitel återvänder vi till färgläggning av allmänna grafer (d.v.s. inte nödvändigtvis planära). I första delen av kapitlet tar vi upp en systematisk metod för att hitta en färgläggning, som leder fram till en övre gräns på det kromatiska talet (Sats 5.1.4). I andra delen visar vi hur en graf kan färgas om så att den sista färgen används så lite som möjligt.

5.1 En girig algoritm för färgläggning

Vi ska nu presentera en *algoritm*, alltså en systematisk procedur, för att färglägga en graf. Algoritmen är *girig*, vilket betyder att den i varje steg tar det bästa beslutet med hänsyn till den information som finns i grannskapet, inte i hela grafen.

Algoritm 5.1.1.
Indata: En graf $G = (V, E)$.
Utdata: En färgläggning av G.

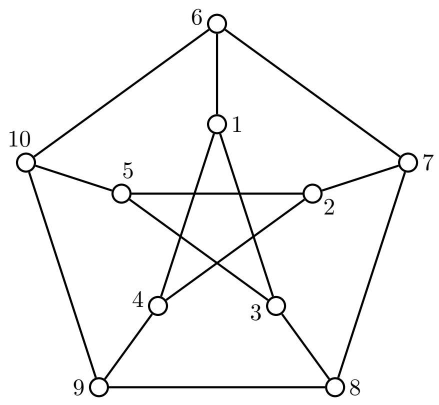
1. Börja med att göra en lista med alla hörn i V, i någon ordning.
2. Gör också en lista med färger, lika många som det finns hörn i V.
3. Gå igenom hörnen i listan. För varje hörn $v \in V$:
    - Gå igenom grannarna till hörnet v och notera färgen hos dem som redan blivit färglagda.
    - Ge hörnet v den första färgen i färglistan som inte är tagen av någon granne hittills.

   Gå vidare till nästa hörn i listan, fortsätt tills hörnen är slut.

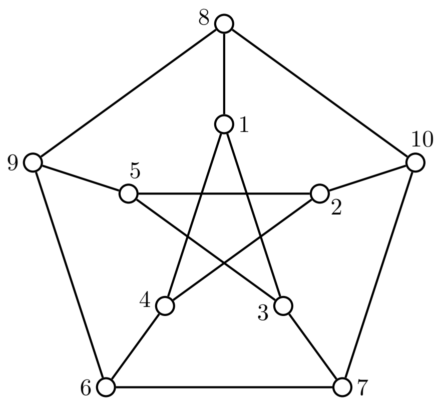
Sammanfattningsvis går algoritmen ut på att gå igenom alla hörn och ge varje hörn den första möjliga färgen. Algoritmen kommer förstås ge en giltig färgläggning eftersom den kollar att varje hörn inte får samma färg som någon granne. Däremot finns ingen garanti för att färgläggningen är optimal; den kan använda fler färger än $\chi(G)$. Som följande exempel visar kan antalet färger som används bero på hur man ordnar hörnen.

Exempel 5.1.2. Låt oss använda färgläggningsalgoritmen på Petersengrafen i Figur 4.4. Vi provar att ordna hörnen dels som i Figur 5.1 och dels som i Figur 5.2. Vi använder följande lista med tio färger:

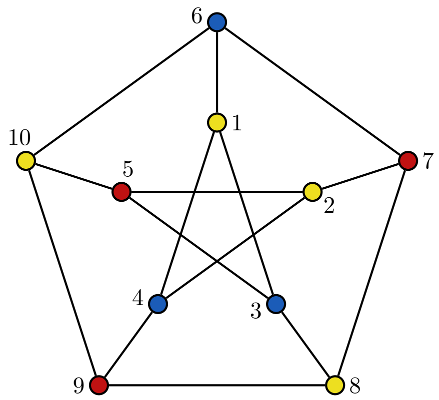
Låt oss noggrannt gå igenom vad algoritmen gör på det första fallet, Figur 5.1. Vi börjar med hörn 1 och eftersom inga grannar till hörnet är färglagda än får hörn 1 första färgen . Hörn 2 har inte heller några färglagda grannar och får därför . Hörn 3 är granne med hörn 1 och måste därför få nästa färg i listan, . Hörn 4 är granne med hörn 1 och hörn 2 som båda är gula, och hörn 4 får därför färgen . Hörn 5 är granne med hörn 2 och 3 och måste därför få den tredje färgen . Hörn 6 är granne med hörn 1 och måste därför få . Hörn 7 har en gul och en blå granne och får därför . Hörn 8 har en röd och en blå granne men ingen gul och kan därför få . Hörn 9 har en gul och en blå granne och får . Hörn 10 har två röda grannar och en blå men ingen gul och kan därför få färgen . Nu är alla hörn färglagda och resultatet visas i Figur 5.3.



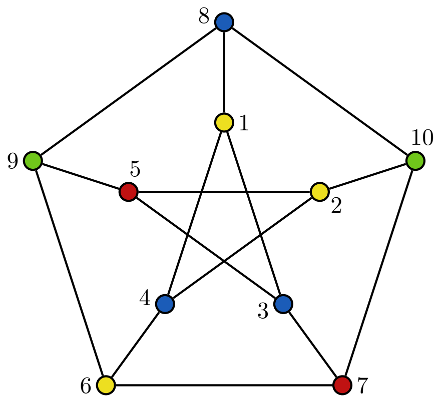
Figur 5.1



Figur 5.2



Figur 5.3



Figur 5.4

Det andra fallet, Figur 5.2, har samma ordning på de fem första hörnen och ger därför dem samma färger som i första fallet. Därefter är ordningen annorlunda, vilket leder till att en fjärde färg måste användas, som Figur 5.4 visar. ▲

Vi kan alltså inte vara säkra på att få en optimal färgläggning, men det finns alltid något sätt att ordna hörnen så att färgläggningen blir optimal, som följande sats visar.

Sats 5.1.3. *För varje graf G finns ett sätt att ordna hörnen på så att den giriga färgläggningsalgoritmen ger en optimal färgläggning.*

Bevis. Utgå från en optimal färgläggning av G. Skapa en färglista som endast innehåller de färger som används i den optimala färgläggningen. Vi kan ordna hörnen i G efter vilken färg de har i den optimala färgläggningen, så att vi först tar alla hörn som har den första färgen i färglistan, därefter alla hörn som har den andra färgen och så vidare. Använd denna ordning på hörnen i den giriga färgläggningsalgoritmen. Då kommer hörnen som har den första färgen att få samma färg igen eftersom de omöjligen kan ha några grannar med samma färg. Hörnen som har den andra färgen kommer få antingen den första eller andra färgen (beroende på om de har någon granne som har den första färgen eller ej). Generellt kommer hörnen som hade färg n i den optimala färgläggningen att få någon av färgerna 1, 2, 3, ..., n, för de kan inte haft några grannar med färg n. Detta visar att den giriga färgläggningsalgoritmen med denna ordning inte kommer använda fler färger än den optimala färgläggningen. □

Notera att satsen tyvärr inte hjälper oss att hitta det bra sättet att ordna hörnen på, eftersom beviset förutsätter att man redan har en optimal färgläggning, och då är det ju egentligen ingen poäng att använda algoritmen. Dock säger satsen att om vi ordnar hörnen på något slumpmässigt sätt så finns det för varje graf en *chans* att algoritmen ger en optimal färgläggning.

Med hjälp av den giriga algoritmen kan vi bevisa följande sats som ger en övre gräns för det kromatiska talet uttryckt i den maximala graden av grafen.

Sats 5.1.4. *För varje graf G är $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.*

Bevis. Låt F vara antalet färger som den giriga algoritmen använder för att färglägga G för någon ordning på hörnen (det spelar ingen roll vilken). Eftersom algoritmen ger en giltig färgläggning måste $F \geqslant \chi(G)$, då $\chi(G)$ är det minsta antalet färger som kan användas. Vi ska visa att $F \leqslant \Delta(G) + 1$, oavsett hur hörnen var ordnade.

Det räcker att visa att algoritmen i varje steg (det vill säga för varje hörn) aldrig kommer försöka använda fler än de $\Delta(G)+1$ första färgerna i färglistan. Betrakta ett hörn $v \in V$. Antalet grannar till v är graden $d(v)$, och det värsta som kan hända är att de alla har olika färger, vilket innebär att $d(v)$ färger är upptagna när v ska färgläggas. Då måste v få en annan färg, och antalet färger som används i grannskapet till v blir då $d(v) + 1$ (inklusive den färg v fick). Eftersom $\Delta(G)$ är den maximala graden är $d(v) \leqslant \Delta(G)$ och antalet färger i grannskapet till v är alltså mindre än eller lika med $\Delta(G) + 1$.

Detta gäller för alla hörn och algoritmen kommer därför aldrig försöka använda fler än $\Delta(G)+1$ färger; den väljer ju alltid den första lediga färgen i färglistan. Därmed är $F \leqslant \Delta(G) + 1$ och det följer att $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$. □

Anmärkning 5.1.5. Genom beviset av ovanstående sats vet vi alltså nu att den giriga färgläggningsalgoritmen i värsta fall använder $\Delta(G) + 1$ färger och i bästa fall $\chi(G)$ färger.

5.2 Omfärgning

Låt i resten av kapitlet G vara en graf, och inför beteckningen $n = \Delta(G)$ för att förkorta notationen. Sats 5.1.4 säger ju att G kan färgläggas med $n + 1$ färger som vi kallar F_1, F_2, ..., F_n och F_{n+1}. Vårt mål är nu att färga om hörnen i grafen med målet att använda färgen F_{n+1} så få gånger som möjligt. Följande hjälpsats visar några sätt att åstadkomma detta ("färga om" kan här också betyda att hörnen behåller sina ursprungliga färger, d.v.s. att inget ändras).

Hjälpsats 5.2.1. *Följande operationer leder till en ny korrekt färgläggning av grafen G:*

(i) *Ett hörn vars grannar har upp till $n-1$ olika färger kan färgas om så att det får en annan färg än F_{n+1}. Som ett specialfall kan ett hörn som har två grannar med samma färg färgas om med en annan färg än F_{n+1}.*

(ii) *Om hörnen x och y är grannar kan de färgas om så att x får en annan färg än F_{n+1} (medan y skulle kunna få färgen F_{n+1} eller någon annan färg).*

(iii) *En stig bestående av hörnen x_1, x_2, ..., x_m kan färgas om så att inget hörn förutom möjligen x_m får färgen F_{n+1}.*

Bevis. (i) Om grannarna tillsammans använder som mest $n-1$ olika färger finns minst två färger lediga av de $n+1$ som vi utgick ifrån, och även om F_{n+1} skulle vara en av de lediga färgerna finns alltså även en annan ledig färg som hörnet kan få.

Eftersom inget hörn kan ha fler än n grannar (den maximala graden) så blir det så att ett hörn som har två grannar med samma färg inte kan ha grannar som använder fler än $n-1$ olika färger.

(ii) Om man bortser från kanten mellan x och y har x som mest $n-1$ grannar och kan alltså få en annan färg än F_{n+1} enligt (i). Om vi nu lägger tillbaka kanten $\{x, y\}$ och betraktar hörnet y så har det som mest n grannar och en av de $n+1$ färgerna måste alltså vara ledig (eventuellt F_{n+1}).

(iii) Se Övning 5.5. □

Med hjälp av ovanstående hjälpsats kan vi bevisa nedanstående sats, som säger att om grafen är sammanhängande så behöver den sista färgen bara användas en enda gång.

Sats 5.2.2. *Varje sammanhängande graf G kan färgas om så att som mest ett enda hörn får färgen F_{n+1}.*

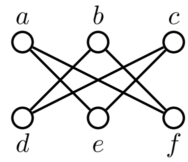
Bevis. Välj ett godtyckligt hörn y i grafen G. För varje annat hörn x i G finns en stig som börjar i x och slutar i y, för G är ju sammanhängande. Genom att använda operation (iii) på varje sådan stig kan vi se till att inget hörn förutom möjligen y får färgen F_{n+1}. □

Övningar

Övning 5.1 ($\star$)**.** Ge ett exempel på en graf G för vilken $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, d.v.s. likhet i Sats 5.1.4.

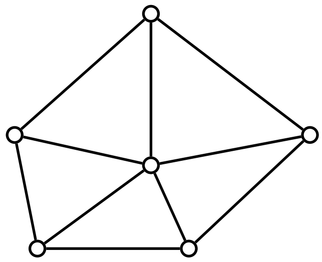
Övning 5.2 ($\star$)**.** Bevisa att den giriga färgläggningsalgoritmen alltid ger en optimal färgläggning på varje graf G som uppfyller $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, oavsett hur hörnen ordnas.

Övning 5.3 ($\star$)**.** Använd den giriga färgläggningsalgoritmen på grafen i Figur 5.5 (välj ordning på hörnen själv). Hur många färger använder algoritmen i bästa fall på grafen? I värsta fall?



Figur 5.5

Övning 5.4 ($\star\star\star$)**.** Använd den giriga färgläggningsalgoritmen på granngrafen till kartan i Figur 3.10, d.v.s. grafen nedan. Hur många färger använder algoritmen i bästa respektive värsta fall på just denna graf? (Notera att det teoretiska värsta fallet i Anmärkning 5.1.5 kanske inte kommer inträffa för denna graf; vi vill här veta hur många färger som verkligen kommer användas i värsta fall för just den här grafen.)

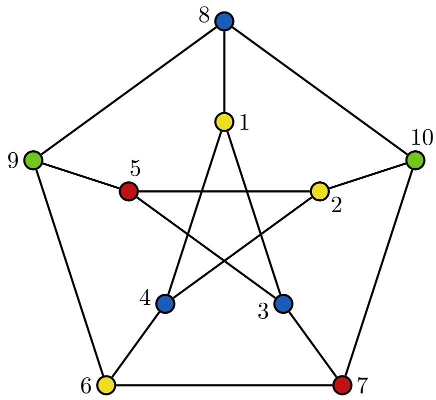


Figur 5.6

Övning 5.5 ($\star\star$)**.** Bevisa påstående (iii) i Hjälpsats 5.2.1.

Ledning: Använd samma idé som i beviset av påstående (ii) i samma hjälpsats.

Övning 5.6 ($\star\star$)**.** Betrakta färgläggningen av Petersengrafen i Figur 5.7. Vad är $\Delta(G)$ för denna graf? Vad säger Sats 5.2.2 om grafen? Färglägg om grafen, till exempel med hjälp av operation (iii) i Hjälpsats 5.2.1, så att det enda hörn som är grönt är hörn nummer 6. Kan hörn 6 få en annan färg än grönt?



Figur 5.7

Övning 5.7 ($\star\star$)**.** Betrakta Sats 5.2.2. Kan även grafer som inte är sammanhängande färgas om så att som mest ett hörn får färgen F_{n+1}? Motivera!

Övning 5.8 ($\star\star$)**.** På en gymnasieskola får eleverna välja bland följande valbara kurser: Bild, Musik, Drama, Design, Kriminologi, Spelutveckling och Psykologi. Varje elev kan välja flera kurser och man måste därför se till att kurser som har gemensamma elever inte krockar. Man skapar därför en graf där varje hörn motsvarar en kurs (sju stycken totalt). Två hörn har en kant mellan sig om det finns någon elev som läser båda kurserna. För att komma fram till hur många olika icke-krockande tider som behövs kan man färglägga grafen; varje färg motsvarar då ett tidspass i schemat. Det kromatiska talet anger det minsta antalet olika tidspass som behövs. Givet elevernas val nedan, bestäm grafen och dess kromatiska tal.

Elev	**Ämnen**
Axel	Musik, Design, Spelutveckling
Diana	Spelutveckling, Psykologi
Gabriel	Bild
Julia	Drama, Kriminologi, Psykologi
Kim	Drama, Design
Miriam	Bild
Sara	Drama, Design, Kriminologi
Viktor	Musik, Drama, Kriminologi

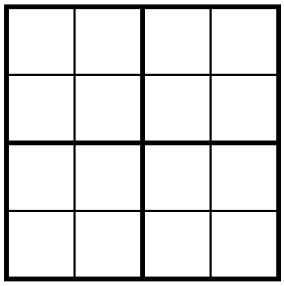
Övning 5.9 ($\star\star\star$)**.** Sudoku är ett logikspel, som går ut på att siffrorna 1 till 9 ska placeras ut i ett rutmönster, till exempel som i Figur 5.8. Regeln är att varje rad, varje kolumn och varje 3×3-block som omges av tjockare streck ska ha varje siffra från 1 till 9 i precis en ruta.

4	5	7	3	2	9	1	8	6
9	3	1	4	8	6	2	7	5
8	2	6	5	1	7	4	3	9
3	9	2	8	6	4	5	1	7
6	7	8	1	5	3	9	4	2
1	4	5	7	9	2	3	6	8
2	1	4	9	7	8	6	5	3
5	8	9	6	3	1	7	2	4
7	6	3	2	4	5	8	9	1

Figur 5.8

Detta kan faktiskt ses som ett färgläggningsproblem av en graf, där varje ruta är ett hörn i grafen, två hörn är grannar om motsvarande rutor ligger i samma rad, kolumn eller block, och siffrorna från 1 till 9 motsvarar färgerna. Det blir alltså en graf med 81 hörn som ska färgläggas med nio färger. Varje hörn har 20 grannar (8 i samma rad, 8 i samma kolumn, och ytterligare 4 i samma block).

Ett förenklat Sudoku-problem ges i Figur 5.9. Här ska siffrorna 1 till 4 placeras ut så att varje rad, kolumn och 2×2-block med tjockare streck ska ha varje siffra i precis en ruta.



Figur 5.9

(a) Hur många hörn får grafen för detta enklare Sudoku? Hur många grannar har varje hörn?

(b) Ange det kromatiska talet för grafen. Ange också $\Delta(G) + 1$ för grafen.

(c) Använd den giriga färgläggningsalgoritmen för att fylla i Sudokut i Figur 5.9. Du behöver inte rita upp grafen. Observera att beroende på vilken ordning du tar rutorna i kanske du inte får en optimal färgläggning. (Detta är alltså inte ett så bra sätt att lösa Sudoku på.)

6 Brooks sats

Målet i detta kapitel är att bevisa nedanstående sats som är en något skarpare version av Sats 5.1.4, som ju säger att $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ för varje graf G.

Sats 6.0.1 (Brooks)**.** *Låt G vara en sammanhängande graf som inte är en komplett graf eller en udda cykel. Då är $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.*

I beviset kommer vi vid ett tillfälle vilja färglägga en graf med det extra villkoret att två hörn a och b som inte är grannar ska ha samma färg. Detta kan åstadkommas genom att "slå ihop" hörnen a och b till ett nytt hörn. Vi kallar detta för att *kontrahera a och b* och själva processen kallas *hörnkontraktion* (ibland kallas det att *identifiera a med b*). Vi börjar med att studera hörnkontraktion i följande delkapitel och bevisar därefter Brooks sats.

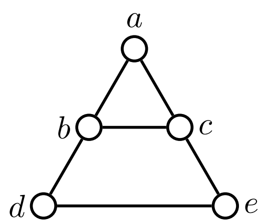
6.1 Hörnkontraktion

Definition 6.1.1. Givet en graf $G = (V, E)$ och två olika hörn $a, b \in V$ definierar vi *kontraktionen* av a och b som den nya graf $G_2 = (V_2, E_2)$ där V_2 fås från V genom att ta bort b och E_2 fås från E genom att i varje kant i E byta ut b mot a (om kanten $\{a, b\}$ finns i E tas den bort). $\triangle$

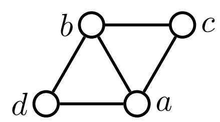
Kom ihåg att vi inte tar hänsyn till om ett element i en mängd räknas upp flera gånger, så om kontraktionen ger upphov till dublettkanter i E_2 så kan vi bortse från dubletterna. (Ett alternativt sätt att se på kontraktionen är att vi ändrar vår definition av likhet så att $a = b$ och sedan tar bort alla dubletter det ger upphov till i V och E samt kanten $\{a, b\}$.)

Exempel 6.1.2. Betrakta grafen $G = (V, E)$ i Figur 6.1 med

$$V = \{a, b, c, d, e\} \quad \text{och}$$
$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}.$$



Figur 6.1



Figur 6.2

Om vi kontraherar a och e fås den nya grafen $G_2 = (V_2, E_2)$ i Figur 6.2 med

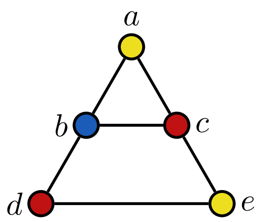
$$V = \{a, b, c, d\} \quad \text{och}$$
$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, a\}, \{d, a\}\}.$$

Eftersom $\{a, c\} = \{c, a\}$ kan vi bortse från en av dessa kanter. Den nya grafen har alltså fyra hörn och fem kanter. ▲

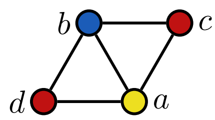
Sats 6.1.3. *Låt a och b vara två olika hörn i G som inte är grannar, och låt G_2 vara kontraktionen av a och b. Om G_2 kan färgläggas med n färger så kan även G färgläggas med n färger och a och b kan få samma färg.*

Satsen bevisas i Övning 6.6.

Exempel 6.1.4. Som illustration av Sats 6.1.3 visas nedan färgläggningar av graferna i Exempel 6.1.2 (där a och e kontraheras) med $n = 3$ färger.



Figur 6.3



Figur 6.4

▲

6.2 Bevis av Brooks sats

Vi är nu redo att bevisa Brooks sats.

Bevis av Sats 6.0.1. Låt $n = \Delta(G)$ för att förkorta notationen. Enligt Sats 5.1.4 går det att färglägga G med $n+1$ färger $F_1, F_2, \ldots, F_n$ och F_{n+1}. Vi ska visa att hörnen kan färgas om så att F_{n+1} inte behöver användas. Vi delar upp beviset i olika fall som tillsammans täcker alla möjliga situationer.

Fall 1: Något hörn i G har färre än n grannar
Låt hörnet y i G ha färre än n grannar. Enligt Sats 5.2.2 kan vi färga om G så att inget hörn förutom möjligen y får färgen F_{n+1}. Eftersom y har som mest $n-1$ grannar kan vi därefter använda operation (i) från Hjälpsats 5.2.1 för att färga om hörnet y så att det får en annan färg än F_{n+1}. Därmed behövs inte färgen F_{n+1}, så $\chi(G) \leqslant n$.

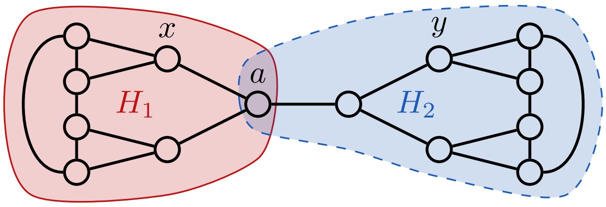
I resterande fall har alla hörn i G exakt n grannar. Vi antar dessutom att $n \geqslant 3$ (se Övning 6.7 för fallet $n \leqslant 2$), vilket innebär att G har minst fyra hörn. Notera att Fall 3 och 4 tillsammans är motsatsen till Fall 2.

Fall 2: För vilka olika fyra hörn x, y, a, b som helst i G så finns en stig från x till y som inte passerar a eller b
Eftersom G inte är en komplett graf så kan vi hitta x och y som inte är grannar med varandra. Färga om G så att inget hörn utom möjligtvis y har färgen F_{n+1} (detta går enligt Sats 5.2.2). Då har varken x eller någon av dess grannar färgen F_{n+1}. Men x har ju n grannar (liksom alla hörn i G), så minst två av dem måste ha samma färg (annars räcker inte n färger för att färglägga både x och dess grannar). Låt a och b vara två grannar till x som har samma färg.

Enligt antagandet finns en stig mellan x och y som inte passerar a eller b. Då kan vi använda operation (iii) från Hjälpsats 5.2.1 på stigen så att inget hörn utom möjligtvis x får färgen F_{n+1} (y får alltså en annan färg). Nu är x

det enda hörnet i grafen som kan ha färgen F_{n+1}, men x har två grannar med samma färg så enligt operation (i) kan x färgas om med en annan färg. Därmed används maximalt n färger, så $\chi(G) \leqslant n$.

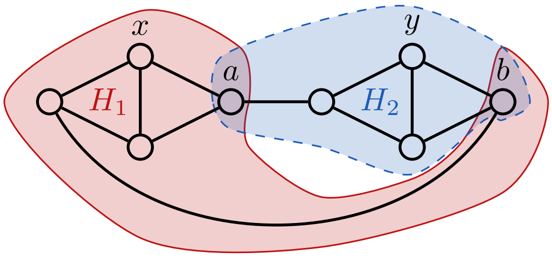
Fall 3: Det finns tre olika hörn x, y, a i G så att varje stig från x till y passerar a
Låt H_1 vara delgrafen till G som induceras av de hörn i G som man kan komma till från x utan att passera a på vägen, samt a själv. Låt H_2 vara delgrafen till G som induceras av a samt alla hörn som finns i G men inte i H_1. Observera att H_1 och H_2 har hörnet a gemensamt men inget annat hörn. Delgraferna H_1 och H_2 är sammanhängande och innehåller tillsammans hela G. (Ett exempel på hur det skulle kunna se ut syns i Figur 6.5.)



Figur 6.5

Liksom alla hörn i G har a totalt n grannar och måste därför ha färre än n grannar i H_1 respektive H_2 (för a har ju minst en granne i varje delgraf). Därmed uppfyller både H_1 och H_2 Fall 1 i detta bevis (hörnet a har färre än n grannar) och de kan alltså färgläggas med n färger. Nu kanske a fick olika färger i H_1 och H_2, men det kan vi ordna på följande sätt: Säg att a blev rött i H_1 och blått i H_2. Då kan vi färga alla röda hörn i H_2 blåa och alla blåa hörn röda, och detta är fortfarande en korrekt färgläggning av H_2 (vi bytte bara plats på två färger i färglistan). Genom att välja samma färg för a i H_1 och H_2 fås en färgläggning av hela G med n färger.

Fall 4: Det finns fyra olika hörn x, y, a, b i G så att varje stig från x till y passerar a eller b
Låt nu H_1 vara delgrafen till G som induceras av de hörn i G som man kan komma till från x utan att passera varken a eller b på vägen, samt a och b själva. Låt H_2 vara delgrafen till G som induceras av a, b och alla hörn som finns i G men inte i H_1. Även i detta fall är H_1 och H_2 sammanhängande och innehåller tillsammans hela G. De har hörnen a och b gemensamma men inga andra hörn. (Ett exempel på hur det skulle kunna se ut syns i Figur 6.6.)



Figur 6.6

Vi delar upp detta fall i två delfall.

Fall 4a: En av delgraferna (säg H_1) blir den kompletta grafen K^{n+1} om kanten $\{a, b\}$ läggs till

Lägg märke till att kanten $\{a, b\}$ inte kan ha funnits från början i detta fall, för då skulle H_1 redan vara K^{n+1} och alla hörn i H_1 skulle ha n grannar i H_1. Men eftersom n är den maximala graden i G skulle inget hörn i H_1 då kunna ha en kant som leder vidare till resten av G (där y finns). Eftersom G är sammanhängande så är detta inte möjligt.

Eftersom a och b därmed inte är grannar kan H_1 färgläggas med n färger genom att ge a och b samma färg och de övriga $n-1$ hörnen i H_1 olika färger (det totala antalet hörn i H_1 måste ju vara $n+1$ precis som i K^{n+1}).

Vi vet att då $\{a, b\}$ läggs till så får a och b exakt n grannar i H_1 (eftersom H_1 då blir K^{n+1}), så innan kanten läggs till måste de ha $n-1$ grannar var i H_1. Men alla hörn i G har ju n grannar, så a och b måste ha exakt en granne var i H_2. Vi kan då färglägga H_2 med n färger så att a och b får samma färg. Betrakta nämligen kontraktionen av a och b i H_2, som ger ett nytt hörn med som mest två grannar. Eftersom vi antog att $n \geqslant 3$ kan enligt Fall 1 kontraktionen färgläggas med n färger, och Sats 6.1.3 ger att H_2 också kan det. Liksom i slutet av Fall 3 kan vi välja färgen på a och b så att den är samma i H_1 och H_2 och då är hela G färglagd med n färger, så $\chi(G) \leqslant n$.

Fall 4b: Ingen av delgraferna blir en komplett graf om kanten $\{a, b\}$ läggs till

Vi kallar graferna där $\{a, b\}$ lagts till för $\tilde{H}_1$ respektive $\tilde{H}_2$. I detta fall är det möjligt att kanten $\{a, b\}$ fanns från början, och i så fall är $\tilde{H}_i = H_i$.

Oavsett om $\{a, b\}$ fanns från början eller ej kan a och b ha som mest $n-1$ grannar var i H_1 (eller H_2), för de måste också ha minst en granne i H_2 (eller H_1) förutom a och b. Detta betyder att de har som mest n grannar i $\tilde{H}_1$ eller $\tilde{H}_2$, så den maximala graden av $\tilde{H}_1$ och $\tilde{H}_2$ är alltså n.

För att avsluta detta fall använder vi (stark) induktion över antalet hörn i grafen. Satsen är uppenbarligen sann för alla grafer med tre hörn eller färre (detta följer ur Övning 6.7 eftersom grafer med tre hörn har $\Delta(G) \leqslant 2$), så ett lämpligt basfall är grafer med tre hörn.

Nu kommer induktionssteget. Notera att $\tilde{H}_1$ och $\tilde{H}_2$ båda har färre hörn än G. Antag därför att satsen är sann för dem. Vi vet att de är sammanhängande och ej kompletta, så om de inte är udda cykler säger satsen att de går att färglägga med n färger. Eftersom vi antog att $n \geqslant 3$ går detta även om de skulle vara udda cykler eftersom sådana kan färgläggas med 3 färger. Alltså går $\tilde{H}_1$ och $\tilde{H}_2$ att färglägga med n färger. Eftersom a och b är grannar måste de få olika färger i båda graferna. Välj färgerna så att a och b har samma två färger i $\tilde{H}_1$ som i $\tilde{H}_2$ (eventuellt får vi byta plats på färgerna i $\tilde{H}_2$). Om dessa färgläggningar sätts ihop har vi färglagt G med n färger, så $\chi(G) \leqslant n$. $\square$

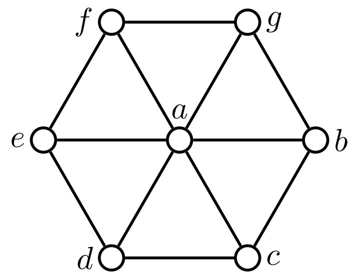
Anmärkning 6.2.1. Brooks sats säger inget om vad kompletta grafer och udda cykler har för kromatiskt tal, men som Övning 2.9 och 2.11 visar gäller $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ för dem.

Övningar

Övning 6.1 ($\star$)**.** Ge ett exempel på en graf G för vilken $\chi(G) = \Delta(G)$.

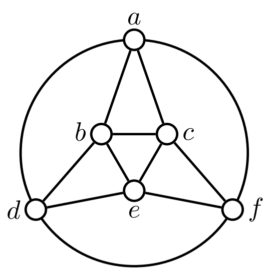
Övning 6.2 ($\star$)**.** Ge ett exempel på en graf G för vilken $\chi(G) < \Delta(G)$.

Övning 6.3 ($\star\star$)**.** Betrakta grafen i Figur 6.7. Kontrahera först hörnen c och f och rita upp den resulterande grafen. Kontrahera därefter hörnen b och d i resultatet och rita upp grafen. Är slutresultatet en planär graf?



Figur 6.7

Övning 6.4 ($\star$)**.** Det kromatiska talet kan öka när man kontraherar två hörn, vilket denna övning ger ett exempel på. Beräkna först $\chi(G)$ för grafen i Figur 6.8. Kontrahera sedan hörnen b och c och kalla den nya grafen G_2. Beräkna $\chi(G_2)$.



Figur 6.8

Övning 6.5 ($\star\star\star$)**.** Hörnkontraktion kan också vara användbart i samband med kartor, vilket denna övning visar. I Figur 6.9 (nästa sida) visas en karta över åtta områden (Östersjön, Polen, Kaliningrad, Litauen, Lettland, Estland, Vitryssland och Ryssland). Rita först upp granngrafen till kartan, med ett hörn per område (alltså åtta hörn).

Kaliningrad är ju egentligen en del av Ryssland, så de två områdena borde ha samma färg på kartan. Kontrahera därför Ryssland och Kaliningrad i granngrafen och rita upp resultatet. Är grafen du får planär? Hur många färger krävs för att färglägga den? (Östersjön ska inte behandlas annorlunda än landområdena i kartan.) Färglägg, om du vill, kartan i Figur 6.9 med motsvarande färger.

Övning 6.6 ($\star\star$)**.** Bevisa Sats 6.1.3.

Figur 6.9

Övning 6.7 ($\star\star$)**.** Bevisa Brooks sats (d.v.s. att $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$ för en sammanhängande graf G som inte är komplett eller en udda cykel) i fallet då $\Delta(G) \leqslant 2$.

Ledning: Det finns bara ett fåtal typer av grafer som uppfyller $\Delta(G) \leqslant 2$ och inte är kompletta grafer eller udda cykler. Gå igenom de möjligheter som finns för olika värden på $\Delta(G)$.

Övning 6.8 ($\star$)**.** Vilken del av beviset av Brooks sats i delkapitel 6.2 är det som inte fungerar för kompletta grafer? Gå igenom beviset med en komplett graf i åtanke och peka ut det steg som inte fungerar.

Övning 6.9 ($\star\star$)**.** Varför fungerar inte beviset i delkapitel 6.2 då $\Delta(G) \leqslant 2$? Gå igenom beviset med en cykel i åtanke och peka ut det steg som inte fungerar (låt alltså bli att anta att $n \geqslant 3$ precis innan Fall 2).

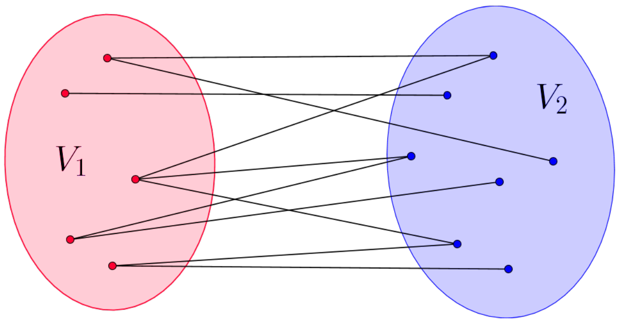
7 Bipartita grafer

En graf som kan färgläggas med en enda färg kan inte ha några kanter, och är därför inte speciellt spännande. Grafer som kan färgläggas med två färger däremot, visar sig vara betydligt mer intressanta. Som vi sett tidigare, är det långt ifrån alla grafer som kan färgläggas med bara två färger. I det här kapitlet ska vi studera just dessa grafer.

7.1 Egenskaper hos bipartita grafer

Definition 7.1.1. En graf som kan färgläggas med en eller två färger kallas *bipartit*. △

Låt $G = (V, E)$ vara en bipartit graf. Vi tänker oss att vi färglägger G med två färger, och låter V_1 vara mängden av hörn som fått den första färgen, och V_2 mängden av hörn som fått den andra färgen. Då är $V_1 \cup V_2 = V$, och det finns inget hörn som tillhör både V_1 och V_2. Varje kant i grafen identifieras med ett par av hörn, varav det ena ligger i V_1 och det andra i V_2. Se Figur 7.1 för ett exempel. I litteraturen definieras bipartita grafer ofta i termer av mängder på detta sätt, utan att nämna färgläggning.



Figur 7.1: En bipartit graf

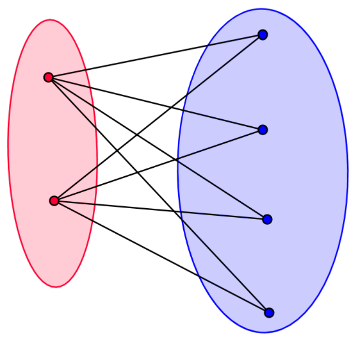
En bipartit graf behöver inte vara planär. Ett exempel på en icke-planär bipartit graf är grafen $K_{3,3}$, som vi såg i Figur 2.17 och 4.3. Denna graf är även ett exempel på något som kallas för en *komplett bipartit graf.* Om vi skulle lägga till en ny kant i $K_{3,3}$ skulle grafen inte längre vara bipartit.

Definition 7.1.2. En *komplett bipartit graf* är en graf som kan färgläggas med två färger på ett sådant sätt att varje hörn av den ena färgen är granne med alla hörn av den andra färgen. Om det finns n hörn av den ena färgen och m hörn av den andra färgen betecknas grafen $K_{n,m}$. △

Se Figur 7.2 för ett exempel på en komplett bipartit graf.

Vi kan också återge definitionen i termer av mängder, på följande vis. Grafen $K_{n,m}$ har hörnmängd $V_1 \cup V_2$, där V_1 och V_2 inte har några gemensamma element, $|V_1| = n$, $|V_2| = m$, och kantmängden är

$$\{\{a, b\} \mid a \in V_1, b \in V_2\}.$$



Figur 7.2: $K_{2,4}$

Vi såg i kapitel 2 att en *komplett graf* är en graf där det inte går att lägga till några fler kanter. På samma sätt är en *komplett bipartit graf* en graf där vi inte kan lägga till några fler kanter, om vi vill att även den nya grafen ska vara bipartit.

Vi såg i Övning 2.11 att det krävs tre färger för att färglägga en udda cykel, så dessa är alltså inte bipartita. Det följer förstås att en graf inte är bipartit om den innehåller en udda cykel. Vi ska nu bevisa att det även gäller omvänt: Om en graf inte innehåller någon udda cykel så är den bipartit!

Sats 7.1.3. *En graf är bipartit om och endast om den inte innehåller någon udda cykel.*

Anmärkning 7.1.4. Uttrycket ”om och endast om” är vanligt i matematiska satser. Satsen ovan skulle också kunna uttryckas som, något i stil med, ”Att vara bipartit är precis samma sak som att inte innehålla en udda cykel”. Vi kan också dela upp satsen i två påståenden, och bevisa dessa var för sig. I det här fallet är det de två påståendena

A. *En graf är bipartit om den inte innehåller en udda cykel,*

och

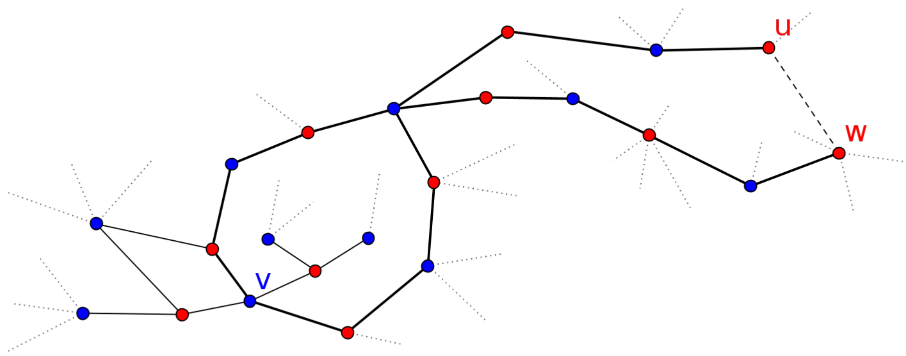
B. *En graf är bipartit endast om den inte innehåller en udda cykel.*

Det senare kan också formuleras

B. *En bipartit graf kan inte innehålla en udda cykel.*

Det senare har vi redan bevisat, så det som återstår är att bevisa påstående **A**.

Bevis. Vi börjar med att bevisa satsen för sammanhängande grafer. Låt därför G vara en sammanhängande graf som inte innehåller någon udda cykel. Vi ska bevisa att G är bipartit. Vi börjar med att välja ut ett godtyckligt hörn v i grafen, och ge detta hörn färgen blå. Vi fortsätter sedan färglägga enligt följande algoritm. Vi ger alla v:s grannar färgen röd. Sedan ger vi alla de röda hörnens grannar färgen blå. Därefter ger vi alla de nya blå hörnens ofärgade grannar färgen röd, o.s.v. I varje steg färglägger vi alltså grannarna till de hörn vi färglade i föregående steg, med den lediga färgen. Vi fortsätter så tills vi kommer till ett steg då alla grannar redan är färglagda. Detta är samma sak



Figur 7.3: Illustration av beviset av Sats 7.1.3

som att använda den giriga färgläggningsalgoritmen, om vi listar hörnen så att v kommer först i listan, därefter v:s grannar, därefter grannarnas grannar, o.s.v. Det är nu två saker som behöver bevisas:

1. Inga grannar får samma färg.

2. Hela grafen blir färglagd.

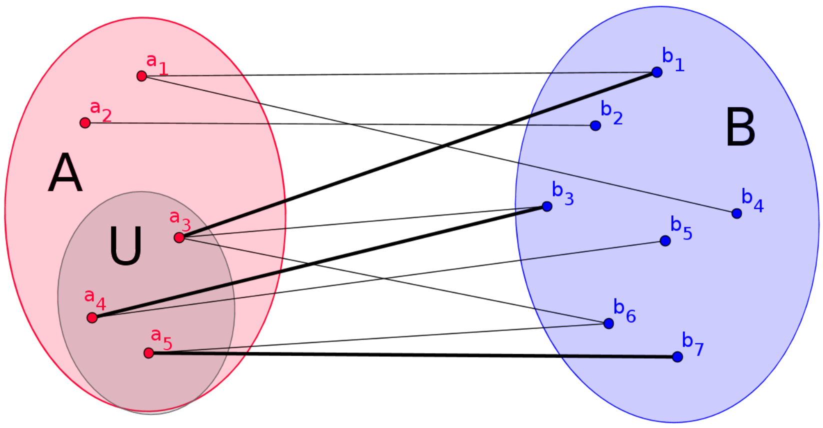
Vi börjar med 1. Den här delen av beviset illustreras även i Figur 7.3. Att två grannar skulle få samma färg skulle bero på att algoritmen, i något steg, säger åt oss att färglägga ett hörn u med en färg, trots att u redan har en granne w av samma färg. Låt oss stanna vid det första steg där detta inträffar. Att u ska ges en viss färg betyder att vi i steget innan gav en granne till u den andra färgen. Om vi då backar tillbaka steg för steg genom färgläggningen vi gjort, får vi en stig från u till v (där vi startade) där vartannat hörn är blått, och vartannat rött. På samma sätt skulle det också finnas en stig från w till v, där hörnen vore av alternerande färg. Dessa två stigar skulle ha hörnet v, och eventuellt något mer hörn, gemensamt. Då skulle det finnas en stig mellan u och w, där hörnen vore av alternerande färg. Eftersom u och w båda fick samma färg skulle stigen ha jämn längd. Tillsammans med kanten $\{u, w\}$ skulle vi då ha en cykel av udda längd. Men några sådana finns ju inte i grafen, enligt vårt grundantagande. Algoritmen ger alltså aldrig två grannar samma färg, eftersom det skulle medföra en udda cykel i grafen.

Nu behöver vi också bevisa punkt 2, alltså att algoritmen verkligen färglägger hela grafen. Låt oss ta ett godtyckligt hörn a i grafen G. Vi vill visa att detta hörn blir färglagt. Eftersom G är sammanhängande finns en stig mellan v och a. Alla hörnen i denna stig kommer att färgläggas, enligt algoritmen. Först det hörn som ligger närmast v, och sedan de övriga i tur och ordning. Även hörnet a blir alltså färglagt.

Vi har nu bevisat att sammanhängande grafer utan udda cykler kan färgläggas med två färger, och alltså är bipartita. Det återstår att förklara varför detta även gäller grafer som inte är sammanhängande. Om vi har en graf, utan udda cykler, som inte är sammanhängande kan den delas upp i ett antal sammanhängande komponenter. Varje komponent kan färgläggas med två färger, enligt vad vi just bevisat. Om vi använder samma två färger på alla komponenterna får vi förstås en färgläggning av hela grafen, i bara två färger. Därmed har vi bevisat satsen i sin helhet. □

7.2 Matchning i bipartita grafer

Ett problem relaterat till bipartita grafer är det som kallas för *matchning*. I resterande del av det här kapitlet, låt $G = (V, E)$ vara en bipartit graf, där $V = A \cup B$ så att A kan färgläggas med en enda färg, och B med den andra färgen. Matchning går ut på att, för varje hörn i någon delmängd $U \subseteq A$, hitta en ”partner” i B. Kravet är att två hörn endast får paras ihop om de är grannar, och att ingen får ha mer än en partner. Nedan följer den formella definitionen av en matchning. Se även Figur 7.4 för ett exempel.



Figur 7.4: De tre markerade kanterna utgör en matchning av U.

Definition 7.2.1. En *matchning* av $U \subseteq A$ är en mängd $M \subseteq E$ av kanter sådana att

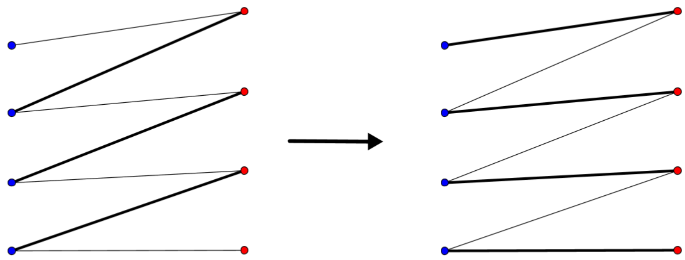
(i) Inga kanter i M delar ett hörn,

(ii) Varje hörn i U ingår i en kant i M. △

Givet en matchning M säger vi att ett hörn v är *matchat* om v är ett av hörnen i någon kant i M. Om ett hörn inte är matchat kallar vi det *omatchat*. De matchade hörnen i Figur 7.4 är a_3, a_4, a_5, b_1, b_3 och b_7.

Observera att det inte är säkert att det existerar en matchning av en given mängd U. Oftast blir det förstås svårare att hitta en matchning ju större vi väljer mängden U. Vi ställer oss nu frågan vad som krävs för att det ska finnas en matchning av hela mängden A. Till att börja med krävs att $|A| \leq |B|$. Ett fullständigt svar på frågan får vi i Sats 7.2.4, men innan dess krävs några fler definitioner.

Definition 7.2.2. Givet en matchning M i en graf. En stig i grafen kallas för en *alternerande stig* om varannan kant i stigen tillhör M. En alternerande stig kallas dessutom för en *utökande stig* om den börjar och slutar i omatchade hörn. △



Figur 7.5: En utökande stig

Alla stigar av längd noll och ett räknas som alternerande.

En *utökande stig* kallas så därför att den kan användas för att utöka mängden av matchade hörn. Se Figur 7.5. Utökningen görs genom att, i matchningen M, byta ut de kanter i stigen som ingår i M mot de som inte ingår i M. På så sätt blir de två omatchade hörnen i stigens ändar också matchade.

Definition 7.2.3. För en mängd $U \subseteq V$ av hörn, låt $N(U)$ beteckna mängden av alla grannar till hörnen i U. Mängden $N(U)$ kallas *omgivningen av* U. $\triangle$

Om vi till exempel väljer $U = \{a_3, a_4, a_5\}$ som i Figur 7.4 är

$$N(U) = \{b_1, b_3, b_5, b_6, b_7\}.$$

Lägg märke till att om $|N(U)| < |U|$ kan det omöjligt finnas en matchning av U. Det finns helt enkelt inte tillräckligt många möjliga ”partners”. Om vi däremot har $|N(U)| \geq |U|$, för alla delmängder $U \subseteq A$, visar det sig att det faktiskt finns en matchning av A.

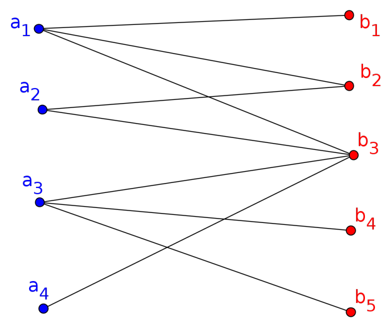
Sats 7.2.4. *Det finns en matchning av A om och endast om $|N(U)| \geq |U|$ för alla delmängder $U \subseteq A$.*

Satsen ovan brukar ibland kallas *Halls giftermålssats* (engelska *Hall's marrige theorem*) efter den engelske matematikern Philip Hall som bevisade satsen 1935.

Beviset av att det finns en matchning, om $|N(U)| \geq |U|$ för alla delmängder $U \subseteq A$, bygger på följande idé. Vi kan alltid hitta en matchning av någon delmängd av A (om inte annat får vi en matchning av ett hörn i A genom att markera en enda kant). Därefter kan vi utöka matchningen genom att använda oss av en utökande stig. På så sätt konstruerar vi successivt en matchning av A.

Låt oss titta på ett exempel, innan vi ger oss på beviset av Sats 7.2.4.

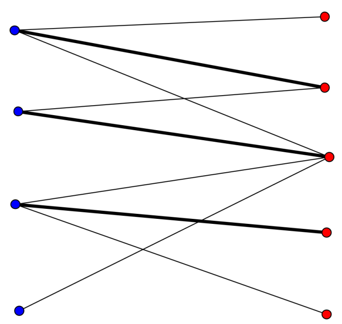
Exempel 7.2.5. Finns det en matchning av $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ i grafen nedan?



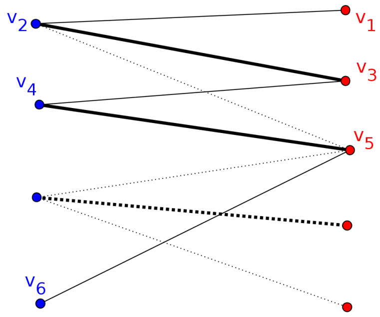
Låt oss se vad Sats 7.2.4 säger. Vi behöver ta reda på om $|N(U)| \geq |U|$ gäller för alla delmängder $U \subseteq A$. I tabellen nedan listas alla delmängder av A, och deras omgivningar. Vi kan se att $|N(U)| \geq |U|$ för alla U.

$\boldsymbol{U}$	$\boldsymbol{N(U)}$
$\{a_1\}$	$\{b_1, b_2, b_3\}$
$\{a_2\}$	$\{b_2, b_3\}$
$\{a_3\}$	$\{b_3, b_4, b_5\}$
$\{a_4\}$	$\{b_3\}$
$\{a_1, a_2\}$	$\{b_1, b_2, b_3\}$
$\{a_1, a_3\}$	$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$
$\{a_1, a_4\}$	$\{b_1, b_2, b_3\}$
$\{a_2, a_3\}$	$\{b_2, b_3, b_4, b_5\}$
$\{a_2, a_4\}$	$\{b_2, b_3\}$
$\{a_3, a_4\}$	$\{b_3, b_4, b_5\}$
$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$
$\{a_1, a_2, a_4\}$	$\{b_1, b_2, b_3\}$
$\{a_1, a_3, a_4\}$	$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$
$\{a_2, a_3, a_4\}$	$\{b_2, b_3, b_4, b_5\}$
$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

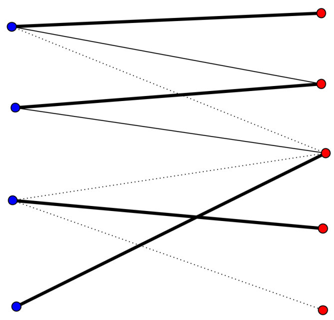
Enligt Sats 7.2.4 ska det alltså finnas en matchning av A. Vi kan enkelt hitta en matchning av delmängden $\{a_1, a_2, a_3\}$, till exempel denna.



Tyvärr går det inte att bara lägga till en kant, så att även a_4 blir matchad. Däremot kan vi hitta en utökande stig, med sin ena ändpunkt i a_4.



(I figuren ovan har vi tillfälligt infört nya namn på några av hörnen, för att tydliggöra stigen.) Med hjälp av denna stig får vi en ny matchning, där även a_4 är matchat.



▲

Bevis av Sats 7.2.4. Vi har redan konstaterat att $|N(U)| \geq |U|$ för alla delmängder $U \subseteq A$ krävs för att det ska kunna finnas en matchning, men låt oss ändå skriva ner beviset ordentligt. En matchning av en delmängd $U \subseteq A$ består av $|U|$ kanter. Var och en av kanterna har ett hörn i U, och ett i $N(U)$. Eftersom inga kanter i en matchning får dela ett hörn måste det alltså finnas minst $|U|$ hörn i $N(U)$, om det ska kunna finnas en matchning av U. Alltså, en matchning av U kräver $|N(U)| \geq |U|$. Om det inte finns någon matchning av en delmängd U finns det inte heller någon matchning av hela A.

Antag nu att $|N(U)| \geq |U|$ gäller för alla $U \subseteq A$. Antag också att vi har en matchning M av någon delmängd av A, men att det finns ett hörn $a \in A$ som inte är matchat. Vi ska bevisa att mängden av matchade hörn kan utökas så att a också blir matchat. Om a har en granne b som är omatchad är det enkelt. Vi lägger helt enkelt till kanten $\{a, b\}$ i M. Vi antar därför att alla grannar till a redan är matchade, från och med nu. Idén är nu att hitta en utökande stig som har sin ena ändpunkt i a.

Låt $\mathcal{S}$ vara mängden av alternerande stigar, av längd större än noll, som börjar någonstans i A och slutar i hörnet a. Låt $A' \subseteq A$ vara mängden av hörn som är det första hörnet i en stig i $\mathcal{S}$, och låt B' vara mängden av hörn som är hörn nummer två i en stig i $\mathcal{S}$. Låt oss studera en stig i $\mathcal{S}$ lite närmare. Stigen börjar och slutar i A, så den måste ha jämn längd. Eftersom stigen slutar i a, som är omatchat, är alltså den sista kanten i stigen inte en kant i M. Det innebär att den första kanten i den alternerande stigen måste tillhöra M. Den första kanten i stigen är alltså en kant som tillhör matchningen, och har ett hörn i A' och ett i B'. Det, i sin tur, medför att $|A'| = |B'|$. Låt nu $U = A' \cup \{a\}$. Vi vet att $B' \subseteq N(U)$, och även att

$$|N(U)| \geq |U| = |A'| + 1 = |B'| + 1.$$

Alltså innehåller $N(U)$ inte bara B', utan även minst ett hörn b som inte ligger i B'. Målet är nu att bevisa att det finns en utökande stig från b till a.

Eftersom $b \in N(U)$ är b granne med något hörn $v \in U$. Från v finns en alternerande stig till a. Låt oss kalla denna stig för P. Om P går genom b finns alltså en alternerande stig från b till a. Om P inte går genom b kan vi i stället lägga till b först i stigen, och på så sätt få en ny stig P' från b till a. Även P' är alternerande, vilket kan inses på följande sätt. Om $v = a$ har P' längd 1, och är därför alternerande. Om $v \neq a$ tillhör stigen P mängden $\mathcal{S}$. Då tillhör den första kanten i P matchningen M, enligt tidigare resonemang. Kanten $\{b, v\}$, som är den första kanten i P', kan inte tillhöra M, eftersom det då skulle finnas två kanter i M som delar hörnet v. Vi kan alltså konstatera att P' är en alternerande stig från b till a. Men vi är inte riktigt färdiga, för vi ville ju ha en utökande stig. Vi behöver alltså bevisa att hörnet b är omatchat. Om b vore matchat skulle det alltså finnas en kant $\{a', b\} \in M$. Då skulle vi få en alternerande stig från a' till a. En sådan stig skulle tillhöra $\mathcal{S}$ och måste, som bekant, börja med en kant i M, vilken då skulle vara kanten $\{a', b\}$. Detta skulle medföra $a' \in A'$ och $b \in B'$. Men vi vet ju att $b \notin B'$, så vi kan konstatera att b inte kan vara matchat.

Vi har nu bevisat att det finns en utökande stig från b till a. Det finns därför en ny matchning, som utökar mängden av matchande hörn med a och b. Denna procedur kan upprepas, tills det att det inte längre finns några omatchade hörn kvar i A. Därmed har vi bevisat att det finns en matchning av A. □

Övningar

Övning 7.1 ($\star$)**.** Avgör vilka av graferna i Figur 7.6 som är bipartita. Motivera dina svar.

Övning 7.2 ($\star\star\star$)**.** Bevisa att en graf är sammanhängande och bipartit om och endast om det bara finns två möjliga färgläggningar, med två givna färger.

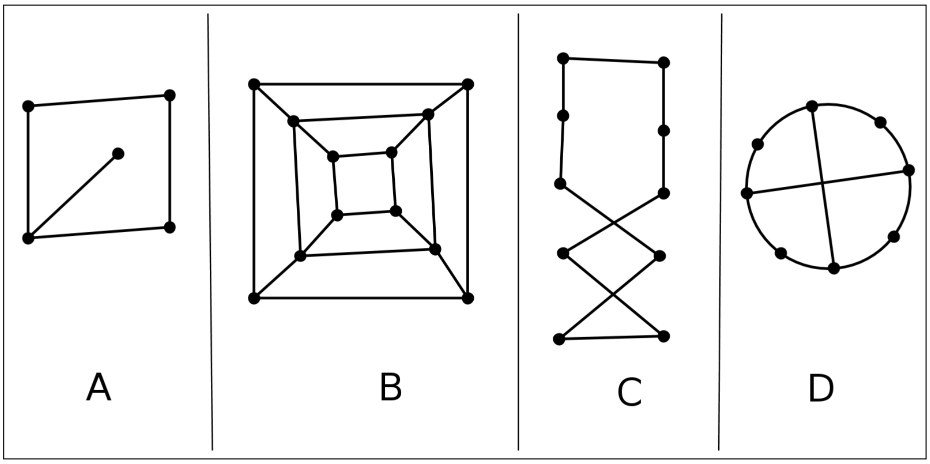
Övning 7.3 ($\star\star$)**.** Låt G vara grafen vi får då vi tar den kompletta bipartita grafen $K_{n,m}$ och lägger till en kant mellan två hörn som inte redan är grannar. Bevisa att G inte är bipartit.

Övning 7.4 ($\star\star\star$)**.** Vilka av följande bipartita grafer är planära?

(i) $K_{1,5}$

(ii) $K_{2,10}$

(iii) $K_{3,15}$



Figur 7.6

(iv) $K_{4,4}$

Allmänt, för vilka heltal n och m är $K_{n,m}$ planär?

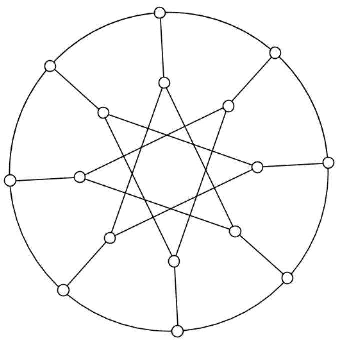
Övning 7.5 ($\star$)**.** Låt $G = (V, E)$ vara en bipartit graf, och säg att $V = A \cup B$, där $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kan färgläggas med en färg, och $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ med en annan. Bevisa att

$$d(a_1) + d(a_2) + \cdots + d(a_n) = d(b_1) + d(b_2) + \cdots + d(b_m) = |E|.$$

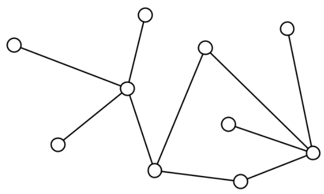
Övning 7.6 ($\star\star$)**.** Grafen i Figur 7.7 är bipartit. Finns det en matchning sådan att alla hörn blir matchade?

Övning 7.7 ($\star\star$)**.** Grafen i Figur 7.8 är bipartit. Finns det en matchning sådan att alla hörn blir matchade?

Övning 7.8 ($\star\star$)**.** Sergi, Oliver, Bashar, Iara och Lisa är bostadssökande. Det finns fem lediga lägenheter, som vi kan kalla A, B, C, D och E. Lägenheterna B, D och E har balkong, men det har inte A och C. Sergi och Oliver är båda intresserade av lägenheterna A, B och C, men inte av D och E som de båda anser har för hög hyra. Bashar är intresserad av B, C och D, men inte av A och



Figur 7.7



Figur 7.8

E som ligger långt från hans jobb. Iara är bara intresserad av lägenhet B, annars bor hon hellre kvar där hon bor. Lisa vill bara bo i någon av de lägenheter som har balkong. Går det att, utifrån dessa preferenser, fördela lägenheterna så att alla sökande får en bostad? Och vad har det här med grafteori att göra?

Övning 7.9 ($\star\star\star$)**.** Åtta personer söker sommarjobb och skickar iväg fyra ansökningar var. Det finns totalt nio lediga jobb, och det kommer in minst tre ansökningar till varje jobb. Bevisa att det går att fördela jobben till de sökande på ett sådant sätt att alla får ett jobb.

Lösningar till udda övningsuppgifter

Kapitel 1

Övning 1.1. (i) $\{-3, 3\}$

(ii) $\{4, 5, 6, 7\}$

(iii) $\{8, 10, 12, 14\}$

(iv) $\{-3, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Övning 1.3. Påståendena är (ii), (iv) och (v), varav (ii) och (v) är sanna.

Övning 1.5. (i) Nej. Talet -3 finns i den första mängden, men inte i den andra.

(ii) Ja, båda är mängden $\{-3, 3\}$.

(iii) Ja, båda är mängden av udda heltal. För varje heltal x har vi $2x - 1 = 2(x - 1) + 1$, där ju även $x - 1$ är ett heltal.

(iv) Ja. Eftersom $x^2 = (-x)^2$ får vi alla heltalskvadrater genom att ta kvadraterna av alla heltal $x \geq 0$. Det har ingen betydelse att alla tal i den första mängden (utom 0), ”räknas upp dubbelt”.

(v) Nej. Till exempel finns talen -5 och -3 i den första mängden, men inte i den andra.

Övning 1.7. Om $n = 1$ är påståendet uppenbart sant, eftersom produkten av ett enda tal bara är talet självt. Vi har även sett att påståendet är sant för $n = 2$ i Övning 1.4. Utifrån detta kan vi nu bevisa påståendet med induktion. Antag att produkten av k stycken udda heltal alltid är udda, för något positivt heltal k. Låt sedan $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ vara $k + 1$ stycken udda heltal. Vi vill, under vårt antagande, bevisa att $a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}$ är udda. Enligt vårt antagande är i alla fall $a_1 a_2 \cdots a_k$ udda. Vi vet också att produkten av två udda heltal är udda. Därav är

$$(a_1 a_2 \cdots a_k)a_{k+1} = a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}$$

udda. Vi har då bevisat påståendet med induktion.

Övning 1.9. Vi bevisar påståendet med induktion. Vi ska bevisa olikheten för alla heltal större än fyra. Det minsta heltalet vi ska bevisa olikheten för är alltså 5, så $n = 5$ blir vårt basfall. Vi sätter in $n = 5$ i uttrycket, och får $5^2 < 2^5$, d.v.s. $25 < 32$, vilket ju är sant. Vi går vidare till induktionssteget. Antag att påståendet är sant för $n = k$, alltså att $k^2 < 2^k$, där k är något heltal större än fyra. Vi vill visa att påståendet då även är sant för $n = k + 1$, alltså att $(k + 1)^2 < 2^{k+1}$. Antagandet $k^2 < 2^k$ kan också formuleras $k^2 \leq 2^k - 1$.

Vi börjar med att utveckla

$$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1.$$

Vi har antagit att $k > 4$, så då är ju även $k > 2$. Därför är

$$k^2 + 2k + 1 < k^2 + k \cdot k + 1 = 2k^2 + 1.$$

Nu använder vi induktionsantagandet $k^2 \leq 2^k - 1$, och får

$$2k^2 + 1 \leq 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1 < 2^{k+1}.$$

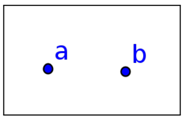
Sammantaget har vi nu visat att

$$(k+1)^2 < 2^{k+1},$$

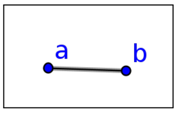
under antagandet att $k^2 < 2^k$. Vi har alltså bevisat att $n^2 < 2^n$ för alla heltal $n > 4$.

Kapitel 2

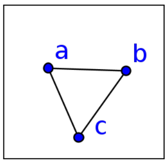
Övning 2.1. (i) $\delta(G) = \Delta(G) = 0$



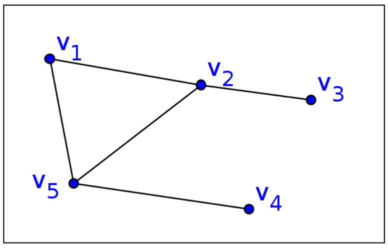
(ii) $\delta(G) = \Delta(G) = 1$



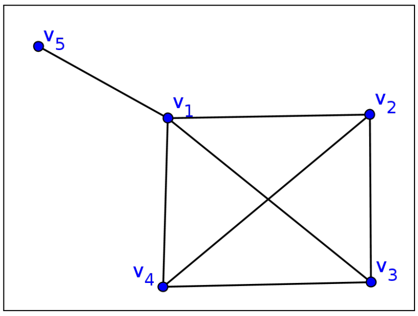
(iii) $\delta(G) = \Delta(G) = 2$



(iv) $\delta(G) = 1, \Delta(G) = 3$



(v) $\delta(G) = 1, \Delta(G) = 4$

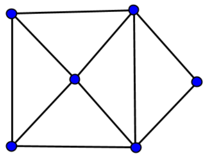


Övning 2.3. Det följer av Sats 2.1.5 att summan av hörnens grader är ett jämnt tal. Om det skulle finnas graf med sju hörn som alla har grad tre skulle summan av hörnens grader vara $7 \cdot 3 = 21$, vilket är ett udda tal. Det kan alltså inte finnas en sådan graf.

Övning 2.5. Vi känner till graden av alla hörn, utom ett. Låt oss kalla den okända graden för x. Enligt Sats 2.1.5 är

$$3 + 3 + 4 + 4 + 4 + x = 2 \cdot 10,$$

och vi kan lösa ut $x = 2$. Det följer att $\delta(G) = 2$ och $\Delta(G) = 4$. Grafen kan till exempel se ut som i figuren nedan.



Övning 2.7. De grafer som är sammanhängande är **A** och **C**, och dess har alltså en sammanhängande komponent vardera. **B** och **D** har två sammanhängande komponenter vardera.

Övning 2.9. Eftersom alla hörn i K^n är grannar måste alla hörn ha olika färger. Alltså är $\chi(K^n) = n$.

Övning 2.11. Det är uppenbart att en cykel aldrig kan färgläggas med bara en färg.

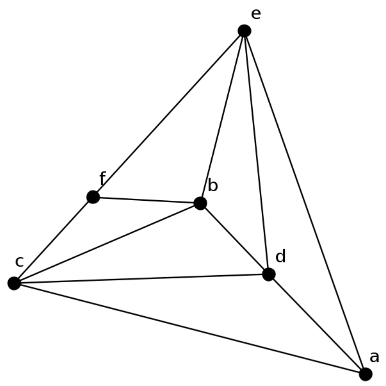
Låt $C = (V, E)$ där $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ och

$$E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{v_1, v_n\}.$$

Talet n är då C:s längd. Det spelar ingen roll vilket hörn vi färglägger först, så låt oss börja i v_1. Vi ger v_1 någon färg, säg gul. Då kan inte v_2 ha samma färg, eftersom v_1 och v_2 är grannar. Hörnet v_2 får därför en annan färg, grön. På samma sätt ser vi att det bara finns ett sätt att fortsätta färgläggningen av $v_3, v_4, \ldots, v_{n-1}$, om vi bara ska använda två färger: v_i blir grön om i är jämn, och gul om i är udda. Om n är ett jämnt tal kan vi ge v_n färgen grön, och vi har då färglagt C med två färger. Om n är udda däremot, är detta inte tillåtet. Då har nämligen v_1 färgen gul, och v_{n-1} färgen grön, och v_n är granne med båda dessa. För att färglägga v_n tvingas vi alltså använda en tredje färg. Därmed har vi visat att $\chi(C) = 3$ om C har udda längd, och $\chi(C) = 2$ om C har jämn längd.

Kapitel 3

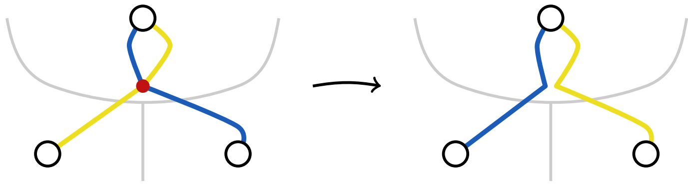
Övning 3.1. Grafen är planär eftersom den kan ritas upp på följande sätt.



Övning 3.3. Vi börjar med att räkna ut hur antalet kanter förhåller sig till antalet hörn i ett träd. Om vi ritar upp trädet på en plan yta, så att inga kanter skär varandra, får vi bara ett enda område (det yttre området). Ett område, utöver det yttre, skulle nämligen innebära att kanterna runt området bildar en cykel. Det följer då från Sats 3.1.2 att antalet kanter är ett mindre än antalet hörn i trädet. För att räkna ut antalet kanter i skogen räknar vi alla hörn i varje träd, och subtraherar ett för varje träd. Resultatet blir alltså $2000 - 100 = 1900$ kanter.

Övning 3.5. Granngrafen G visas nedan. Eftersom grafen innehåller en cykel av längd tre måste $\chi(G) \geqslant 3$ enligt Övning 2.11 och 2.12. Att det räcker med tre färger framgår av färgläggningen till höger, så $\chi(G) = 3$.

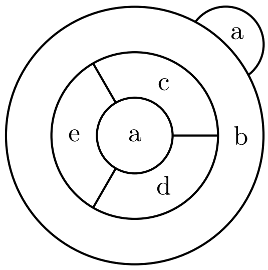
Övning 3.7. Dra vägar mellan huvudstäderna enligt ledningen i uppgiften. Varje väg går alltså bara genom de två länder vars huvudstäder de sammanbinder. Vi ser också till att dra vägarna på ett sådant sätt att de bara passerar gränsen mellan de två länderna en enda gång. Låt nu säga att två vägar korsar varandra. Korsningen ligger i något land, som vi kan kalla A. De båda vägarna leder alltså till huvudstaden i A. Dessutom vet vi att, från korsningen leder de båda vägarna till huvudstaden i A, utan att lämna landet A. Vi kan då byta plats på de två vägarna efter korsningen och separera dem, som figuren nedan visar.



Den nya grafen uppfyller fortfarande våra kriterier. På detta sätt ritar vi alltså upp kartans granngraf på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra.

Övning 3.9. Om alla fem territorier ska vara grannar med varandra blir granngrafen till kartan grafen K^5, och den grafen är inte planär (se lydelsen till Övning 3.8). Men enligt Övning 3.7 är granngrafen till en plan karta med sammanhängande länder alltid planär, så K^5 kan inte vara granngraf till en sådan karta. Indelningen är alltså inte möjlig om länderna ska vara sammanhängande.

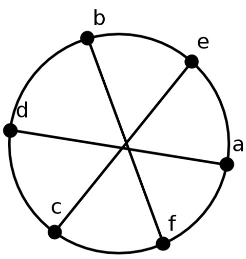
Om man däremot låter bli att kräva att länderna ska vara sammanhängande (det stod ju inget om det i berättelsen) är uppdelningen möjlig, se till exempel figuren nedan.

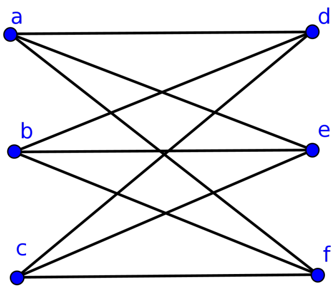


Kapitel 4

Övning 4.1. Om K^5 vore planär skulle $\chi(K^5) \leq 4$, enligt Fyrfärgssatsen. Men enligt Övning 2.8 och 2.9 är $\chi(K^5) = 5$. Grafen kan alltså inte vara planär.

Övning 4.3. Grafen i figuren är faktiskt grafen $K_{3,3}$. Den är alltså inte planär, enligt Övning 4.2. Att det är grafen $K_{3,3}$ kan inses på följande sätt. Namnge hörnen så som i figuren nedan.



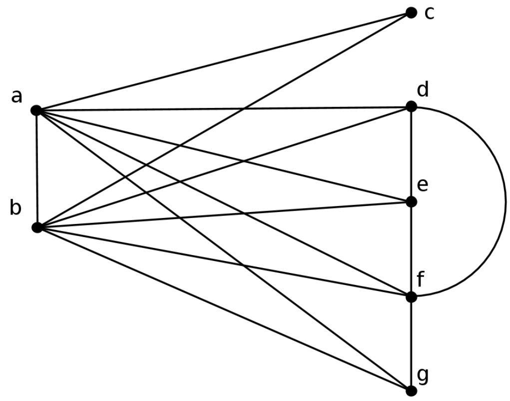


Både graferna har hörnmängd $\{a, b, c, d, e, f\}$ och kantmängd

$$\{\{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}\}.$$

Övning 4.5. Nej, grafen är inte planär.

Namnge hörnen så som i figuren nedan, och betrakta delgrafen som induceras av hörnen a, b, d, e, f.



Detta är fem hörn som alla är grannar. Den inducerade delgrafen är alltså grafen K^5, vilken ju inte är planär, enligt Sats 4.1.3. Denna delgraf kan alltså inte ritas upp på en plan yta, på ett sådant sätt att inga kanter skär varandra. Det hjälper förstås inte att lägga till fler hörn och kanter. Med andra ord, om en delgraf inte är planär är heller inte den ursprungliga grafen planär.

Övning 4.7. Vi bevisar Sexfärgssatsen med induktion över antalet hörn. Basfallet är alltså då vi har ett enda hörn i grafen. För att färglägga en sådan graf räcker det förstås med en enda färg. Vi går vidare till induktionssteget. Antag att varje planär graf med n hörn kan färgläggas med sex färger. Vi ska bevisa att satsen då även är sann för en graf G med $n+1$ hörn. Enligt Sats 4.1.2 finns ett hörn v av grad fem eller lägre. Vi föreställer oss nu att vi tar bort hörnet v, och alla kanter vid v, från grafen. Då får vi en planär graf med n hörn. Enligt induktionsantagandet kan denna graf färgläggas med sex färger. Vi vill nu sätta tillbaka hörnet v, och de tillhörande kanterna, och färglägga detta för att få en färgläggning av den ursprungliga grafen G. Eftersom v har högst fem grannar är en av de sex färgerna tillåten att använda på v. På så sätt kan vi alltså färglägga grafen G, och vi har då bevisat satsen med induktion.

Övning 4.9. Nej. Om en sådan sats skulle finnas skulle det alltså innebära att alla planära grafer kan färgläggas med tre färger. Men K^4 är en planär graf som inte kan färgläggas med enbart tre färger.

Kapitel 5

Övning 5.1. Några exempel på grafer som uppfyller detta är kompletta grafer och udda cykler. Ett konkret exempel är K^5 som ju har $\chi(K^5) = 5$ och $\Delta(K^5) = 4$.

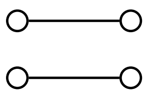
Övning 5.3. Till exempel kan hörnen ordnas $abcdef$ och med färgordningen gul, blå, röd fås då färgläggningen till vänster nedan. Om hörnen istället ordnas $adbecf$ fås färgläggningen till höger.

Enligt Anmärkning 5.1.5 ger algoritmen i bästa fall $\chi(G)$ färger och i värsta fall $\Delta(G) + 1$ färger. Eftersom $\chi(G) = 2$ vilket visas av den vänstra figuren (det går förstås inte att använda bara en färg) är algoritmens bästa fall två färger. Då $\Delta(G) = 2$ för grafen blir $\Delta(G) + 1 = 3$, så algoritmens värsta fall är tre färger, vilket ju skedde i den högra figuren.

Övning 5.5. Börja med att bortse från alla kanter i stigen och betrakta hörnet x_1. Då vi bortser från kanten $\{x_1, x_2\}$ har x_1 som mest $n-1$ grannar och kan alltså få en annan färg än F_{n+1}. Lägg sedan till kanten $\{x_1, x_2\}$ och betrakta hörnet x_2. Då vi bortser från kanten $\{x_2, x_3\}$ har x_2 som mest $n-1$ grannar och kan alltså också få en annan färg än F_{n+1}.

Vi fortsätter på samma sätt: för varje hörn x_i ($i = 1, 2, \ldots, m-1$) behåller vi tidigare kanter i stigen men bortser från kanten $\{x_i, x_{i+1}\}$, och kan därför ge x_i en annan färg än F_{n+1}. Därefter läggs kanten $\{x_i, x_{i+1}\}$ tillbaka och vi går vidare till nästa hörn. Till sist kommer vi till x_m som då har maximalt n grannar med som mest n olika färger och därför finns en färg ledig (som skulle kunna vara F_{n+1}). □

Övning 5.7. Nej. Ett enkelt motexempel är följande graf:



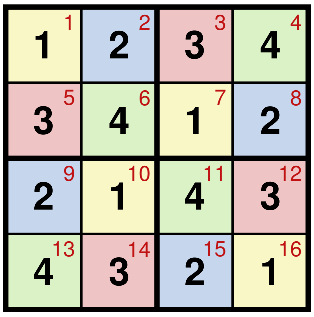
Varje hörn har en granne, så $n = \Delta(G) = 1$ men en andra färg F_2 måste ju användas två gånger för att färglägga grafen.

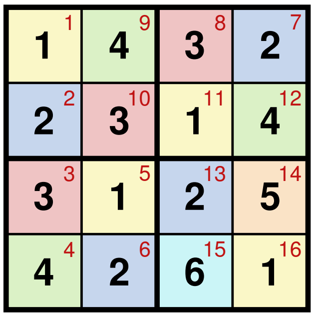
Dock kan en icke sammanhängande graf färgas om så att som mest ett hörn *per sammanhängande komponent* använder färgen F_{n+1}, för Sats 5.2.2 kan ju användas på varje sammanhängande komponent separat.

Övning 5.9. (a) Grafen får 16 hörn, och varje hörn har sju grannar (tre i samma rad, tre i samma kolumn, och ytterligare 1 i samma block).

(b) Det kromatiska talet är 4 (tre färger är uppenbarligen för lite; att fyra räcker framgår av lösningsförslaget till (c)). $\Delta(G) + 1$ är 8.

(c) Färgläggningarna för två olika ordningar på hörnen visas nedan. Den vänstra använder fyra färger och är alltså optimal, men den högra använder sex färger.

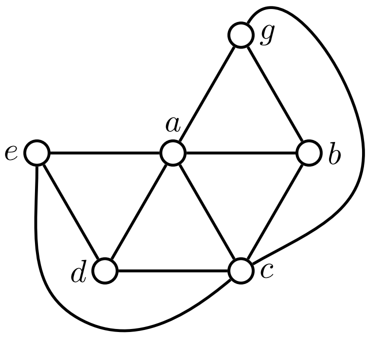




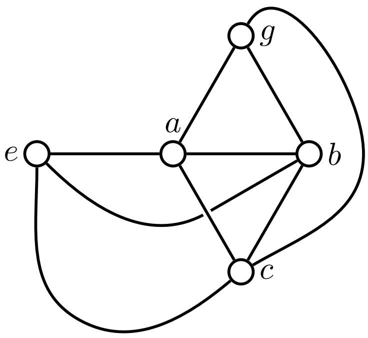
Kapitel 6

Övning 6.1. Ett exempel är Petersengrafen i Figur 5.3 som ju har maximal grad $\Delta(G) = 3$. Eftersom grafen innehåller en udda cykel så behövs minst tre färger för att färglägga den. Att det räcker med tre visas i Figur 5.3, så $\chi(G) = \Delta(G)$.

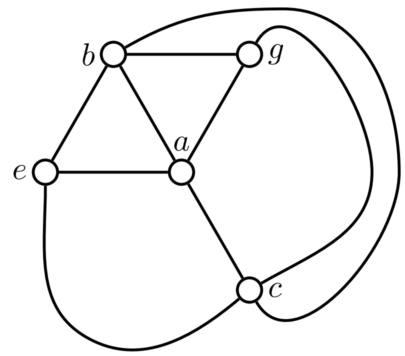
Övning 6.3. Efter att vi kontraherat c och f ser grafen ut som nedan:



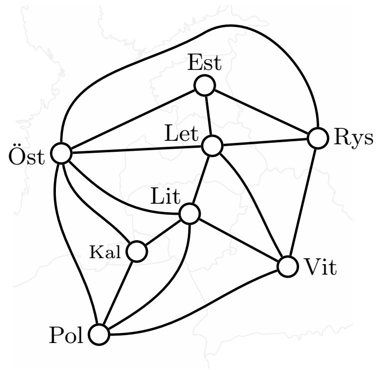
Efter att vi sedan kontraherat b och d ser grafen ut så här:



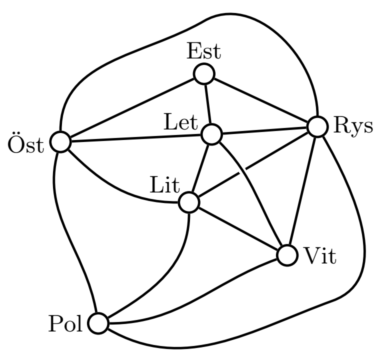
Grafen är planär, vilket man kan se till exempel genom att flytta på hörnet b:



Övning 6.5. Granngrafen till kartan blir så här (med hjälptexter utsatta för att identifiera hörnen):

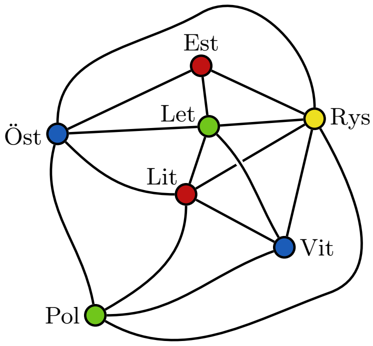


Om Ryssland och Kaliningrad kontraheras blir grafen så här:

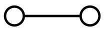


Grafen är inte planär, enligt samma resonemang som i beviset av Sats 4.1.3. Den har sju hörn och 16 kanter, och den kortaste cykeln har längd tre. Om den vore planär skulle Sats 3.1.2 ge att $7 - 16 + o = 2$, d.v.s. $o = 11$. Enligt Hjälpsats 4.1.1 skulle då $3 \cdot 11 \leqslant 2 \cdot 16$, d.v.s. $33 \leqslant 32$, men detta är inte sant. Alltså kan grafen inte vara planär.

För att färglägga grafen behövs minst fyra färger eftersom det finns fyra hörn som alla är grannar med varandra (K^4 är alltså en delgraf till grafen), t.ex. Ryssland, Lettland, Litauen och Vitryssland. Att det inte behövs fler än fyra färger visas av färgläggningen nedan.



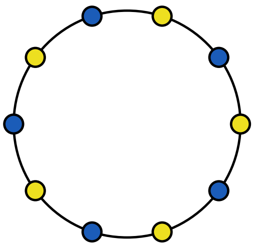
Övning 6.7. För fallet $\Delta(G) = 0$ finns bara en möjlig sammanhängande graf, nämligen grafen med ett hörn och inga kanter: 
Men detta är en komplett graf, så den ingår inte i satsens påstående.

För fallet $\Delta(G) = 1$ är den enda möjliga sammanhängande grafen den med två hörn och en kant:  Även denna graf är komplett.

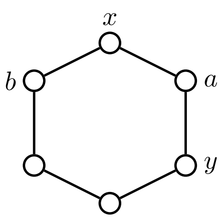
Låt nu $\Delta(G) = 2$. Eftersom G ska vara sammanhängande måste den antingen vara en stig eller en cykel. En stig kan alltid färgläggas med två färger:

 $\cdots$

För en stig är alltså $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$. Om G är en cykel måste den vara en jämn cykel eftersom udda cykler är uteslutna. Även jämna cykler kan färgläggas med två färger, så $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.



Övning 6.9. Fall 1 gäller inte för en cykel eftersom alla hörn har två grannar. Inte heller Fall 2 eller Fall 3 gäller för cykler, men Fall 4 är sant (vi antar att cykeln har minst längd fyra, annars är den en komplett graf). Till exempel kan det se ut som i figuren nedan.



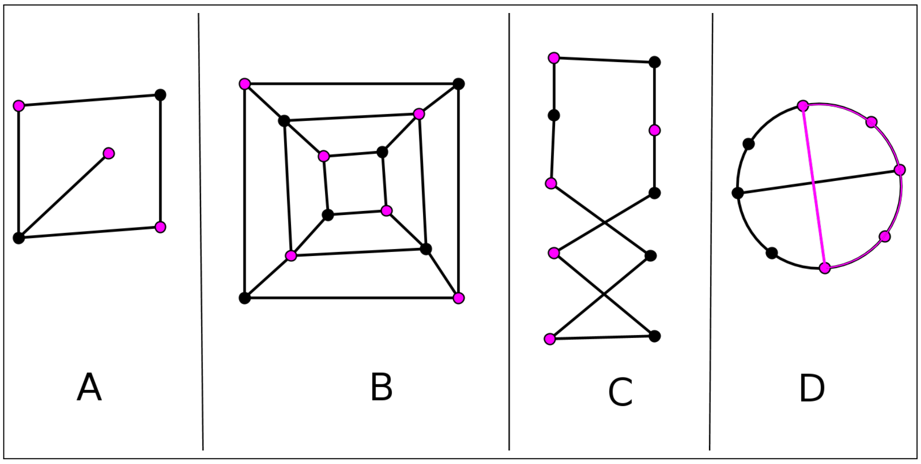
Det finns många olika sätt att välja x, y, a och b på. För vissa val kommer Fall 4a gälla, och för andra kommer Fall 4b gälla. Vi tittar på båda dessa delfall.

I beviset under Fall 4a stämmer det mesta även på cykler, men om $n = 2$ kan inte Fall 1 användas på kontraktionen av a och b i H_2 som det står mot slutet av sista stycket (när $n \geqslant 3$ har ju det kontraherade hörnet lägre grad än n, men det stämmer inte nu).

I Fall 4b får vi problem i induktionssteget (sista stycket), för det kan hända att $\tilde{H}_1$ eller $\tilde{H}_2$ är en udda cykel, och då krävs tre färger för att färglägga dem, men vi ville använda $n = 2$ färger.

Kapitel 7

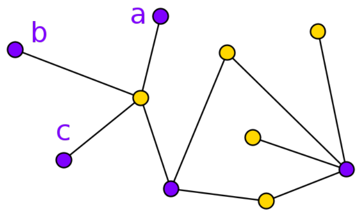
Övning 7.1. A,B och C är bipartita, men inte D. I figuren nedan visas färgläggning med två färger av A,B och C, och en udda cykel i figur D.



Övning 7.3. Grafen $K_{n,m}$ kan färgläggas med två färger, säg röd och blå, så att varje rött hörn är granne med alla de blå hörnen. Vi väljer ut två hörn a och b som inte är grannar. Eftersom grafen är komplett måste dessa ha samma färg, säg röd. Låt nu G vara grafen vi får när vi lägger till kanten $\{a, b\}$ i grafen. Låt nu c vara något av de blå hörnen. Då är båda a och b grannar med c. För att färglägga hörnen a, b och c i G krävs nu tre färger, eftersom de alla är grannar. G är alltså inte bipartit.

Övning 7.5. Varje kant i grafen har ett hörn i A, och ett i B. Om vi går igenom alla hörn i A och räknar antalet kanter som utgår ifrån varje hörn, och summerar dessa, kommer vi därför att få precis antalet kanter i grafen. Detta är samma sak som att summera graderna av hörnen i A. Samma sak gäller förstås B.

Övning 7.7. Nej, det finns ingen sådan matchning. Låt t. ex. $U = \{a, b, c\}$, där a, b, och c är markerade i figuren nedan.



Då är $|U| = 3$, medan $|N(U)| = 1 < 3$.

Övning 7.9. Problemet kan beskrivas med en bipartit graf på följande sätt. Betrakta de åtta personerna och de nio lediga jobben som hörn i en graf. Låt oss kalla mängden av personer för A, och mängden av jobb för B. Hörnmängden i grafen är alltså $A \cup B$. Det finns en kant mellan en person och ett jobb om personen sökt jobbet. Att tilldela varje person ett jobb är samma sak som att hitta en matchning av A. Vi ska använda Sats 7.2.4 för att bevisa att en matchning existerar. Vi vill alltså bevisa att $|N(U)| \geq |U|$, för alla delmängder $U \subseteq A$.

Låt alltså U vara någon delmängd av A. Eftersom varje person har sökt fyra jobb är $N(U) \geq 4$. Om $|U| \leq 4$ vet vi alltså att $N(U) \geq |U|$. Vi behöver bevisa att detta även gäller för större delmängder U. Låt oss därför anta att $|U| \geq 5$ från och med nu.

Låt X vara de personer i A som inte tillhör U. Låt även Y vara mängden av de jobb som ingen i U sökt, d.v.s. de jobb som inte tillhör mängden $N(U)$. Låt z vara det totala antalet ansökningar till jobben i Y. Dessa ansökningar kommer från personer i X. Personerna i X har sammanlagt skickat iväg $4|X|$ ansökningar. Alltså är $4|X| \geq z$. Vi vet också att det inkommit minst tre ansökningar till varje jobb i Y, så $z \geq 3|Y|$. Vi har alltså

$$4|X| \geq z \geq 3|Y|, \quad \text{så} \ \ 4|X| \geq 3|Y|.$$

Låt oss nu försöka översätta detta till ett uttryck i $|U|$ och $|N(U)|$ i stället. Vi har $|X| = 8 - |U|$ och $|Y| = 9 - |N(U)|$, så om vi sätter in detta i olikheten ovan får vi

$$32 - 4|U| \geq 27 - 3|N(U)|.$$

Detta kan också uttryckas som

$$|N(U)| \geq \frac{4|U| - 5}{3}.$$

Kom nu ihåg att $|U| \geq 5$. Det betyder att $|U| - 5 \geq 0$. Vi använder oss av detta i olikheten ovan, och får

$$|N(U)| \geq \frac{4|U| - 5}{3} = \frac{3|U| + (|U| - 5)}{3} \geq \frac{3|U|}{3} = |U|,$$

det vill säga $|N(U)| \geq |U|$.

Vi har nu bevisat att $|N(U)| \geq |U|$ gäller oavsett storlek på U, så enligt Sats 7.2.4 finns det en matchning.

Förslag till vidare läsning

David S. Richeson, *Euler's Gem*
Princeton University Press, 2008

Ralph P. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics*
Pearson, 2017, Femte upplagan

Sakregister