



STOCKHOLMS MATEMATISKA CIRKEL

POLYTOPER

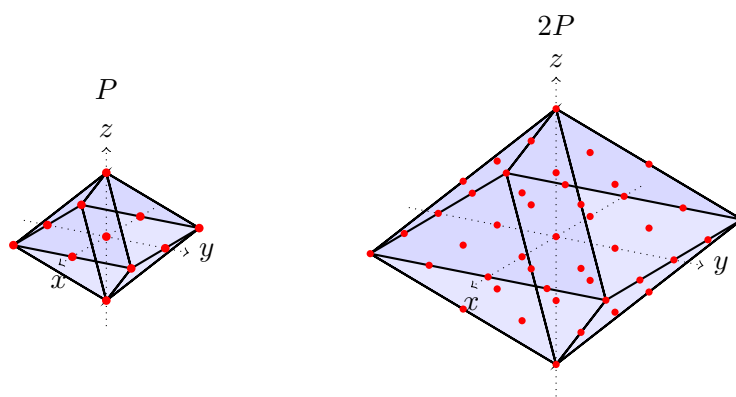
ANDERS LUNDMAN

GUSTAV SÆDEN STÅHL

REVIDERAT AV

DANIEL ERIKSSON

OLIVER LINDSTRÖM



INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK, KTH OCH
MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET
2026–2027

STOCKHOLMS MATEMATISKA CIRKEL genom tiderna
(tidigare KTH:S MATEMATISKA CIRKEL)

2026-2027	Polytoper
2025-2026	Hyperbolisk geometri
2024-2025	Felrättande koder
2023-2024	Elliptiska Kurvor
2022-2023	Variationskalkyl
2021-2022	Matematik och AI
2020-2021	Musik och matematik
2019-2020	Datorernas matematik
2018-2019	Grafteori med inriktning på färgläggning
2017-2018	Geometriska konstruktioner
2016-2017	Vad är ett tal?
2015-2016	Fraktaler
2014-2015	Polytoper
2013-2014	Grupper, mönster och symmetrier
2012-2013	Den matematiska analysens grunder
2011-2012	Diofantiska ekvationer
2010-2011	Polynom
2009-2010	Hyperbolisk geometri
2008-2009	Talteori
2007-2008	Sannolikhetssteori
2006-2007	Gruppteori
2005-2006	Vad är ett tal?
2004-2005	Integraler
2003-2004	Linjär algebra och bioinformatik
2002-2003	Algebra och kryptografi
2001-2002	Analysens grunder
2000-2001	Talföljder, rekursioner och iterationer
1999-2000	Linjära avbildningar

Innehåll

Lista över symboler	1
1 Mängdlära	5
1.1 Definition, axiom, sats och bevis	5
1.2 Bevistekniker	6
1.3 Olika satser och hur man bevisar dem	8
1.4 Mängder	9
1.5 Funktioner	12
1.6 Mängdoperationer	13
1.7 Det euklidiska talplanet och dess delmängder	16
2 Polygoner	24
2.1 Definition av polygoner	24
2.2 Picks sats	26
3 Polytooper	37
3.1 En algebraisk struktur på $\mathbb{R}^2$	37
3.2 Konvexa höljen	39
3.3 Euklidiska rummet och polyedrar	42
3.4 Högredimensionella rum och polytooper	46
4 Kombinatorik och polynom	51
4.1 Grundläggande kombinatorik	51
4.2 Polynom	53
4.3 Approximera funktioner med polynom	56
5 Genererande funktioner	66
5.1 Genererande funktioner	66
5.2 Heltalslösningar	68
5.3 Kombinatorik och formella summor	70
6 Ehrhartserier och koner	76
6.1 Ehrhartfunktionen	76
6.2 Ehrhartserien	81
6.3 Koner	83
7 Ehrhartserier och tetraedra	89

7.1	Ehrhartserien och konen över en polyeder	89
7.2	Att räkna samma sak på två olika sätt	91
8	Allmän Ehrhartteori	97
8.1	Trianguleringar av polyedrar	97
8.2	Ehrharts sats	100
8.3	Geometrin hos Ehrhartpolynomet	103
8.4	Att räkna inre punkter	106
	Lösningar till udda övningsuppgifter	113
A	Några bevis	140
A.1	Konvexa höljen och polygoner	140
A.2	Att räkna gitterpunkter i konen över en tetraeder	142
A.3	Triangulera en polyeder	144
	Förslag till vidare läsning	148
	Sakregister	149

Lista över grekiska alfabetet

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	my
N	ν	ny
Ξ	ξ	xi
O	$\omicron$	omikron
Π	π	pi
P	ρ	rho
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	ypsilon
Φ	ϕ	fi
X	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Lista över mängdsymboler

$x \in X$	x är ett element i mängden X .
$X \subset Y$	X är en delmängd till Y .
$\forall x \in X$	för varje x som är ett element i mängden X .
$\exists x \in X \dots$	existerar ett element x i mängden X sådant att $\dots$
$f: X \rightarrow Y$	f är en funktionen med definitionsmängd X och målmängd Y .

Några ord på vägen

Detta kompendium är skrivet för att användas som kurslitteratur till STOCKHOLMS MATEMATISKA CIRKEL under läsåret 2026–2027 och består av åtta kapitel. Det är en omarbetning av materialet till cirkeln given 2014–2015 skrivet av Anders Lundman och Gustav Sæden Ståhl.

Kompendiet är inte tänkt att läsas enbart på egen hand, utan ska ses som ett skriftligt komplement till undervisningen. Alla elever rekommenderas att läsa igenom varje kapitel själv innan föreläsningen. Det är inte nödvändigt att förstå alla detaljer vid den första genomläsningen.

Som de flesta matematiska skrifter på högre nivå är kompendiet kompakt skrivet. Detta innebär att man i allmänhet inte kan läsa det som en vanlig bok. Istället bör man pröva nya satser och definitioner genom att på egen hand exemplifiera. Därmed uppnår man oftast en mycket bättre förståelse av vad dessa satser och deras bevis går ut på.

Till varje kapitel finns ett antal övningsuppgifter. De udda övningarna har lösningar längst bak i kompendiet. Syftet med dessa är att eleverna ska kunna lösa dem och på egen hand kontrollera att de förstått materialet. Övningar med jämna nummer saknar facit och kan användas som examination. Det rekommenderas dock att man försöker lösa dessa uppgifter även om man inte examineras på dem.

Om man kör fast kan man alltid fråga en kompis, en lärare på sin skola eller någon av författarna. Under årets gång kommer det att finnas övningstillfällen där eleverna kan jobba med uppgifterna, själva eller i grupp, och få hjälp av oss.

Vissa övningar kan ha flera lösningar och det som står i facit bör i detta fall endast ses som ett förslag.

Några ord om cirkeln

STOCKHOLMS MATEMATISKA CIRKEL är en kurs för matematikintresserade gymnasieelever, som arrangeras av Kungliga Tekniska högskolan och Stockholms universitet. Cirkeln startade 1999. Vid starten hade den namnet KTH:s MATEMATISKA CIRKEL och hölls i KTH:s ensamma regi. Ambitionen med cirkeln är att sprida kunskap om matematiken och dess användningsområden utöver vad eleverna får genom gymnasiekurser, och att etablera ett närmare samarbete mellan gymnasieskolan och högskolan. Cirkeln ska särskilt stimulera elevernas matematikintresse och inspirera dem till fortsatta naturvetenskapliga och matematiska studier.

Till varje kurs skrivs ett kompendium som distribueras gratis till eleverna. Detta material, föreläsningsschema och övrig information om STOCKHOLMS MATEMATISKA CIRKEL finns tillgängligt på

<https://www.math-stockholm.se/cirkel>.

Cirkeln godkänns ofta som en gymnasiekurs eller som matematisk breddning på gymnasieskolorna. Det är upp till varje skola att godkänna cirkeln som en kurs och det är lärarna från varje skola som sätter betyg på kursen. Lärarna är självklart också välkomna till cirkeln och många har kommit överens med sin egen skola om att få cirkeln godkänd som fortbildning eller som undervisning.

Vi vill gärna understryka att föreläsningarna är öppna för alla gymnasieelever, lärare eller andra matematikintresserade.

Vi har avsiktligt valt materialet för att ge eleverna en inblick i matematisk teori och tankesätt och presenterar därför både några huvudsatser inom varje område och bevisen för dessa resultat. Vi har också som målsättning att bevisa alla satser som används om de inte kan förutsättas bekanta av elever från gymnasiet.

Årets tema är Polytober. Kapitel 1 är en grundläggande introduktion till mängdlära och matematisk argumentation. I Kapitel 2 möter vi Picks sats för polygoner som relaterar arean av en polygon i ett rutnät med antalet rutnätshörn inuti och på kanten av polygonen (så kallade gitterpunkter). Tre-dimensionella månghörningar, polyedrar, introdueras och beskrivs algebraiskt som konvexa höljen i kapitel tre. Målet är hitta en generalisering av Picks sats i tre dimensioner genom att studera hur antalet gitterpunkter $L_P(n)$ växer när en polyeder P skalas med n - den så kallade Ehrhartfunktionen. För detta gör vi ett avsteg till kombinatorik och genererande funktioner i kapitel tre och fyra. Med kombinatorik kan vi räkna gitterpunkter i tetraedrar. Genererande funktioner är ett verktyg vi använder för att hitta Ehrhartfunktionen för en polyeder. Givet talföljden $L_P(n)$ skapar vi en formell serie $\sum_{n=0}^{\infty} L_P(n)t^n$ kallad Ehrhartserien som är den genererande funktionen till $L_P(n)$. I kapitel sex ger vi ett uttryck för Ehrhartserien av tetraedrar. I det avslutande kapitlet visas att Ehrhartfunktionen av en polyeder är ett tredjegradspolynom. Koefficienten för n^3 ges av volymen och kan uttryckas i $L_P(1)$, $L_P(2)$ och $L_P(3)$.

Författarna, sommaren 2026

1 Mängdlära

Temat för årets matematiska cirkel är Polytober. Detta kapitel är en introduktion i den matematiska metoden och ett antal grundbegrepp som vi kommer använda oss av i kursen.

1.1 Definition, axiom, sats och bevis

I detta avsnitt ska vi beskriva den matematiska metoden utifrån fyra begrepp: *definition*, *sats*, *bevis* och *axiom*.

En *definition* bestämmer vad en term betyder så att man kan arbeta matematiskt med den. Till exempel kan vi definiera udda och jämna tal på följande sätt.

Definition 1.1.1. Ett heltal n är *udda* om det finns ett heltal k som uppfyller att $n = 2k + 1$.

Definition 1.1.2. Ett heltal n är *jämnt* om det finns ett heltal k som uppfyller att $n = 2k$.

Ofta har man en intuition om vad en term betyder redan innan man definierar den. Läsaren hade till exempel säkert en uppfattning om vad udda och jämna tal är innan vi definierade dem. Syftet med en definition är att precisera detta.

När definitionen är gjord, så överger man sina tidigare uppfattningar om vad termen betyder och utgår endast ifrån definitionen. Man säger att definitionen är *stipulativ*. En definition är alltså inte rätt eller fel, utan bara mer eller mindre användbar och intuitiv.

Definitioner bygger ofta på begrepp som läsaren är bekant med. Till exempel utgår Definition 1.1.1 och 1.1.2 från att läsaren redan vet vad ett heltal är.

En *sats* är ett påstående som bevisats vara sant. Varje sats hör samman med ett *bevis*: ett argument för att påståendet är sant.

Sats 1.1.3. Om n är udda, så är $n + 1$ jämnt.

Bevis. Om n är udda så finns det ett heltal k så att $n = 2k + 1$. Då gäller att

$$n + 1 = 2k + 1 + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1).$$

Eftersom $k + 1$ är ett heltal, så är $n + 1$ ett jämnt tal. □

Bevisen kombinerar definitioner och olika logiska slutledningsregler för att nå den önskade slutsatsen. Sats 1.1.3 har en syskonsats. Beviset är mer eller mindre identiskt, och lämnas som övning.

Sats 1.1.4. Om n är jämnt, så är $n + 1$ udda.

En sats vars främsta syfte är att användas i beviset av en annan sats kallas för en *hjälpssats* eller ett *lemma*. En sats som följer omedelbart ur en annan sats, till exempel som ett specialfall, kallas för en *följdsats* eller ett *korollarium*.

Ett påstående måste vara bevisat för att få kallas för en sats. Om man har goda skäl att tro att ett påstående är sant men inte formellt bevisat det kallas påståendet för en *förmodan*, eller *hypotes*. Två exempel är *Riemannhypotesen* och *primtalstvillingsförmodan*.

En förmodan kan förbli obevisad i hundratals år. Ett berömt exempel är *Fermats stora sats*, som formulerades av Pierre de Fermat (1607–1665) år 1637 men bevisades först av Andrew Wiles år 1995. Riemannhypotesen, som ännu är obevisad, formulerades 1859 av Bernard Riemann (1826–1866).

Eftersom bevisen utgår ifrån definitionen, och inte vår intuition, så behöver man ibland bevisa saker som känns uppenbara. Läsaren vet till exempel att

- (i) alla tal är antingen udda eller jämna, och
- (ii) ett tal kan inte vara udda och jämnt samtidigt.

Men om man läser Definition 1.1.1 och 1.1.2 så ingår inte dessa påståenden. Kan man inte tänka sig tal som varken är udda eller jämnt? Eller tal som är både och?

Bevis utgår ifrån antaganden och tidigare kända satser. Dessa tidigare satser måste också bevisas innan de kan anses giltiga. Men dessa bevis måste också bygga på antaganden och satser, som också måste bevisas, och så vidare.

För att undvika en oändlig kedja av bevis, eller ett cirkulärt bevis (ett bevis som använder sig av det man försöker bevisa) så måste man göra grundantaganden som inte behöver bevisa. Dessa kallas för *axiom*. Exempel på axiom är att mängden av heltal existerar och att addition uppfyller

- (Associativitet) För alla heltal n, m, p gäller $(n + m) + p = n + (m + p)$.
- (Identitet) Det finns ett element 0, som vi kallar *nollan*, sådan att för alla heltal n så gäller $0 + n = n + 0 = n$.
- (Inverser) För varje heltal n existerar ett heltal $(-n)$, som vi kallar för *minus n*, sådan att $0 = n + (-n) = (-n) + n$.
- (Kommutativitet) För alla heltal n, m så gäller $n + m = m + n$.

1.2 Bevistekniker

Ett bevis för en sats är ett argument som förklarar varför satsen är sann. Vi har redan sett ett exempel när vi bevisade Sats 1.1.3. I detta avsnitt ska vi gå igenom två metoder för att bevisa matematiska satser: direkta bevis och motsägelsebevis.¹

Ett *direkt bevis* utgår ifrån satsens antaganden och definitioner och bevisar satsen rakt på, så att säga. Beviset av Sats 1.1.3 är ett exempel på direkt bevis. Ett annat är följande sats.

¹Ibland förekommer termen *indirekt bevis*. Vissa använder det som synonym till motsägelsebevis, andra som en synonym till bevisregeln *modus tollens*. Vi undviker den helt.

Sats 1.2.1. Antalet funktioner från en mängd A med n element till en mängd B med m element är m^n .

Bevis. Varje funktion från A till B kan beskrivas som en tabell där varje element i A motsvaras av precis ett element i B . Listan innehåller totalt n platser, och på varje plats kan vi välja bland m element att välja bland. Alltså finns det totalt

$$\underbrace{m \cdot m \cdots m \cdot m}_{n \text{ stycken}} = m^n$$

olika funktioner. □

Ibland går det inte att använda direkta bevis, till exempel när man ska bevisa att något inte är fallet. Då kan det vara enklare att anta att det man vill bevisa är falskt, och visa att detta leder till en motsägelse. Om alla steg i beviset är korrekta så måste det ursprungliga antagandet vara fel. Detta kallas för ett *motsägelsebevis*.

Sats 1.2.2. Ett tal kan inte vara udda och jämnt samtidigt.

Bevis. Antag att n är ett tal som är både udda och jämnt. Då finns det två heltal, k och l , så att $n = 2k$ och $n = 2l + 1$. Då gäller att

$$2k = n = 2l + 1 \implies 2k - 2l = 1 \implies 2(k - l) = 1.$$

Med andra ord finns det heltal $m = k - l$ så att $2m = 1$. Kan det finns ett sådant tal? Det finns två fall.

(i) Om $m \leq 0$, så är $1 = 2m \leq 0$. Motsägelse!

(ii) Om $m \geq 1$ så är $2m \geq 2 > 1$. Motsägelse! □

Ett berömt motsägelsebevis är följande.

Sats 1.2.3. Talet $\sqrt{2}$ är irrationellt.

Bevis. Antag motsatsen, det vill säga att $\sqrt{2} = a/b$ för några heltal a och b . Antag att a och b är förkortade så långt som möjligt. Då kan endast en av a eller b vara jämn, eftersom om båda är jämna kan vi skriva

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2c}{2d} = \frac{c}{d}$$

och då var inte a och b förkortade så långt som möjligt.

Av definitionen av $\sqrt{2}$ får vi att

$$\sqrt{2}^2 = 2 = \frac{a^2}{b^2} \implies 2b^2 = a^2.$$

Den sista ekvationen säger att a^2 är jämn. Eftersom kvadrater av udda tal är udda (se Övning 1.20), så måste a vara ett jämnt tal, det vill säga $a = 2k$ för något heltal k . Då får vi att

$$2b^2 = (2k)^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2.$$

Eftersom b^2 är jämnt, så måste b vara jämnt. Men nu har vi bevisat att både a och b är jämna, vilket var omöjligt eftersom vi hade förkortat bråket så långt som möjligt. Detta är en motsägelse. $\square$

Att bevis inkluderar antaganden och små hjälpsatser som inte nämns är snarare regel än undantag, till exempel lägger vi nästan aldrig tid på att visa $2 > 0$ i mitten av ett bevis. Ifall man bevisade precis vartenda antagande och påstående utifrån axiomen varje gång skulle bevisen bli väldigt långa och komplicerade. Läsaren förväntas själv fylla i de luckor som uppstår.

Det händer dock att uppenbara antaganden är mycket svåra, till och med omöjliga, att bevisa utifrån definitionerna. Historien är fylld av matematiker som gjort till synes självklara antaganden som sedan visat sig vara svåra att bevisa.

Beviset av Sats 1.2.3 är ett exempel på det. Vi antar att ett bråk kan förkortas så långt som möjligt. Detta är inte självklart, utan bygger i själva verket på aritmetikens fundamentalsats som vi inte kommer att behandla i kursen.

Den tredje bevistekniken som finns kallas för *induktionsbevis* men den kommer vi inte behöva i den här kursen.

1.3 Olika satser och hur man bevisar dem

I föregående avsnitt diskuterade vi olika bevistekniker. Men vilka tekniker är lämpliga för vilka typer av satser?

- **Implikation:** Man säger att P implicerar Q om Q är sant när P är det. Ett exempel är Sats 1.1.4, som säger att om ett tal n är jämnt, så är talet $n + 1$ udda. Man brukar beteckna implikationer med en tjock pil $\implies$, så att P medför Q skrivs

$$P \implies Q.$$

En implikation kan bevisas med ett direkt bevis. Då antar man att P är sant, och sedan visar man att Q också måste vara sant (det är så vi bevisar Sats 1.1.4). Man kan också använda ett motsägelsebevis. Då antar man att P är sann och att Q är falsk, och bevisar en motsägelse.

Ett tredje sätt att bevisa att P implicerar Q är att bevisa att om Q är falsk, så är P falsk. Detta kallas för *omvändningen* av en implikation.

- **Ekvivalens:** En ekvivalens är när två påståenden P och Q implicerar varandra, alltså att om P så Q , och om Q så P . Man brukar använda frasen P om och endast om Q . Man använder tjocka dubbelpilar för att beteckna ekvivalenser, så att P om och endast om Q skrivs som

$$P \iff Q.$$

Ekvivalenser bevisas genom att första visa att P implicerar Q , och sedan att Q implicerar P .

- **Universalsats:** En universalsats säger att alla n i en mängd M uppfyller något villkor P . Universalsatser kan bevisas som implikationer, genom att omformulera universalsatsen som att om n ligger i mängden M , så uppfyller n villkoret P , det vill säga

$$n \in M \implies n \text{ uppfyller } P$$

Man kan även bevisa en universalsats genom ett motsägelsebevis. Då antar man att det finns ett n i M som inte uppfyller P , och bevisar att det är omöjligt.

- **Existenssats:** En existenssats säger att finns ett objekt n som har egenskapen P . Den typiska existenssatsen är ekvationslösning. Att $x^2 = 3$ har en lösning är en existenssats, och kan omformuleras som att det finns ett tal x så att $x^2 = 3$.

Ett sätt att bevisa en existenssats är att konstruera det sökta objektet utifrån objekt man redan vet finns. Till exempel så kan man bevisa att det finns ett udda kvadrattal genom att notera att $3^2 = 9$ är udda och ett kvadrattal.

Man kan också använda ett motsägelsebevis. Då antar man att det inte existerar någon objekt med egenskapen P och visar att det leder till en motsägelse. Dessa bevis har fördelen att vi inte behöver beskriva hur objektet konstrueras. I gengäld kan bevisen vara mycket komplicerade.

En variant på universalsatsen är att inget n i M uppfyller P . Den kan omformuleras som att alla n i M saknar egenskapen P . För dessa typer av satser är motsägelsebevis ofta smidiga: man antar att det finns ett n i M som uppfyller P och härleder en motsägelse.

Universal- och existenssatser är duala till varandra, i bemärkelsen att om du ska bevisa en existenssats med hjälp av ett motsägelsebevis så antar du en universalsats, och vice versa, se bevisen av 1.2.2 och 1.2.3.

1.4 Mängder

En *mängd* är en samling objekt. Man kan samla nästan vad man vill i en mängd: tal, katter, och andra mängder.² Det viktiga är att man alltid kan avgöra ifall ett objekt tillhör mängden eller inte. De objekt som ligger i mängden kallas för *element*.

Det lättaste sättet att beskriva en mängd är att räkna upp elementen som ingår i den. För att markera att objekten ligger i en mängd, så omger man listan med *mängdklamrar* $\{$ och $\}$. Mängden som innehåller 1, 2 och 3 skrivs alltså som

$$\{1, 2, 3\}.$$

²Vi skriver *nästan* av en anledning. Det finns samlingar av objekt som kan beskrivas men som inte utgör en mängd. Detta kallas *Russells paradox*, efter Bertrand Russell (1872–1970). Russells exempel är samlingen av alla mängder som inte innehåller sig själv.

Två mängder A och B är lika om de innehåller samma element, vilket skrivs $A = B$. Det spelar ingen roll i vilken ordning man skriver elementen eller hur många gånger de listas. Därför gäller att

$$\{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}.$$

Om ett element x tillhör en mängd A brukar man skriva $x \in A$, vilket uttalas som x *tillhör* A . Om x inte tillhör A skriver man $x \notin A$. Antalet element som tillhör en mängd A brukar betecknas med $|A|$.

Mängden på formen $\{\}$ innehåller inte några element alls och kallas den *tomma mängden*. Den brukar betecknas med $\emptyset$ och är unik i aspekten att den saknar element, vi skriver alltså $|\emptyset| = 0$.

En mängd kan innehålla andra mängder som element. Mängden

$$A = \{\{1, 2\}, 3\}$$

har två element vilket skrivs som $|A| = 2$. Dess element är: mängden $\{1, 2\}$ och talet 3. Mängden $\{1, 2\}$ innehåller i sin tur elementen 1 och 2. Däremot innehåller A varken 1 eller 2, det vill säga

$$\{1, 2\} \in A \quad \text{men } 1 \notin A.$$

Att mängder kan innehålla andra mängder kan ha paradoxala konsekvenser. Till exempel kan vi lägga den tomma mängden i en mängd, och bilda mängden av den tomma mängden.

$$A = \{\emptyset\} = \{\{\}\}$$

Mängden A innehåller ett element, den tomma mängden, och är därför inte tom. Mängden av den tomma mängden är alltså inte lika med den tomma mängden.

Detta verkar motsägelsefullt. Den tomma mängden är ju tom, så mängden av den tomma mängden borde ju också vara tom? Tricket är att skilja på mängden och elementen i mängden. Den tomma mängden är ju ett element i sig, även om den inte innehåller några element, precis som att 0 är ett tal, trots att representerar ett antal som inte finns. Man kan tänka sig att en påse som innehåller en annan tom påse, inte är tom.

Det finns ingen begränsning på hur stor en mängd kan vara, och de flesta mängder man studerar innehåller oändligt många element. Dessa mängder kan naturligtvis inte skrivas ut som en lista. Istället beskriver man dem med *mängdbyggaren*, som har följande allmänna form $\{x \mid \text{villkor på } x\}$. Den här mängden består av alla element som uppfyller villkoret. Ett exempel är mängden

$$\{n \mid n \text{ är jämnt}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

som innehåller alla jämna tal.

En mängd B är en *delmängd* av en mängd A om alla element som tillhör B även tillhör A . Man skriver detta som $B \subset A$. Till exempel så är $\{1, 2\}$ en delmängd av $\{1, 2, 3\}$, eftersom 1 och 2 är element i båda mängderna. Om två mängder är delmängder av varandra så är de lika.

En icke-tom mängd har alltid minst två delmängder: sig själv och den tomma mängden. En delmängd B av A är *äkt* om $B \neq A$.

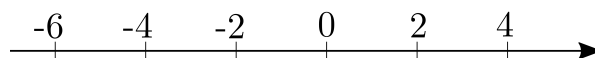
Det är lätt att blanda ihop element och delmängder. Det beror på att mängder kan innehålla andra mängder, så att en delmängd av en mängd kan vara ett element i mängden. Mängden $A = \{\emptyset\}$ är ett bra exempel. Den tomma mängden är både ett element i och en delmängd av A .

I mängden $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ är $\{1, 2\}$ både en delmängd och ett element. Däremot så är $\{1\}$ enbart en delmängd av A , medan 1 enbart är ett element.

De olika talsystemen kan ses som mängder av tal, och har fått egna beteckningar. De *naturliga talen* betecknas med $\mathbb{N}$ och består av talen 0, 1, 2, 3, och så vidare.³

Naturliga tal kan adderas och multipliceras utan problem. Resultatet är alltid ett nytt naturligt tal. För att subtrahera behöver vi införa de negativa talen -1 , -2 , och så vidare. De naturliga talen tillsammans med de negativa talen kallas för *heltalen*, och betecknas med $\mathbb{Z}$ (av tyskans *Zahl* = tal).

Heltal kan adderas, subtraheras och multipliceras. Man kan däremot inte dividera dem med varandra. För detta krävs *rationella tal*. De definieras som alla kvoter a/b , där a och b är heltal och b är skilt från 0. Mängden av alla rationella tal betecknas med $\mathbb{Q}$.

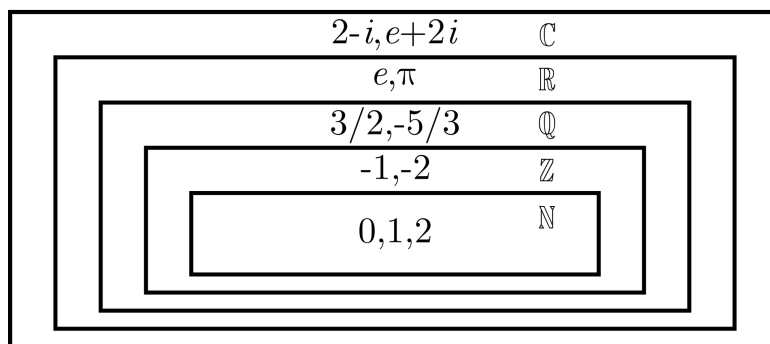


Figur 1.1: Tallinjen runt 0.

De rationella talen ligger på den så kallade *tallinjen*, som går från negativa tal till vänster och till positiva tal till höger (se Figur 1.1). Det finns dock tal som inte är rationella, men som ändå ligger på tallinjen. Ett exempel är $\sqrt{2}$, som är längden på diagonalen i en kvadrat med sidan 1. Läger man till dessa tal får de *reella talen*, som betecknas med $\mathbb{R}$.⁴ Reella tal som inte är rationella kallas för *irrationella*.

³Vissa exkluderar 0 från de naturliga talen. Att inkludera 0 har dock fördelar. Om man börjar räkna från 0 och går ett steg i taget kommer man ha gått n steg när man räknat till n . Exempel: om vi räknar till 3 från 0 så får vi $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, vilket är 3 steg. Om vi börjar från 1 får vi istället $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, vilket är 2 steg.

⁴Reella tal är mycket mystiska. Den matematiska cirkeln 2016–2017, *Vad är ett tal?*, handlade om hur man kan definiera dem i termer av rationella tal. Den intresserade läsaren uppmanas att söka upp kompendiet på Cirkelns hemsida: <https://www.math-stockholm.se/samverkan/cirkel/>



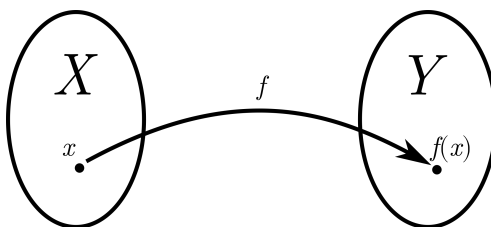
Figur 1.2: De olika talsystemen från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{C}$.

De reella talen kan utvidgas ytterligare till de *komplexa talen*, men det utelämnar vi i detta kompendium.

1.5 Funktioner

En funktion f från en mängd X till en mängd Y beskriver ett sätt att para ihop element i en mängd X med element i en mängd Y . Det brukar skrivas som $f: X \rightarrow Y$. Mängden X kallas för *definitions mängd* och mängden Y kallas för *målmängd*. Man kan se f som en process som tar ett element i mängden X och avger ett element som ligger i mängden Y . När man tillämpar en funktion på ett element x i X så kallas x för funktionens *argument*. Mängden av alla värden en funktion i praktiken antar kallas för funktionens *värde mängd*, och denna betecknas ofta med V_f . Värde mängden är då alltså en delmängd av målmängden, och kan beskrivas som $V_f = \{f(x) \mid x \in X\}$. Till exempel är $\sin(x)$ en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, så funktionens målmängd är alltså $\mathbb{R}$, men värde mängden är $[-1, 1]$.

Två funktioner är lika när de har samma definitions mängd, samma målmängd och de är lika på alla element i definitions mängden. Definitions- och målmängden är alltså en del av funktionen.



Figur 1.3: En funktion f från X till Y .

Funktioner beskrivs ofta med formler. Exempelvis så kan funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ som tar ett naturligt tal och returnerar dess kvadrat beskrivas som $f(n) = n^2$. Alla polynom kan ses som en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, som beräknas genom att man sätter in talet x i uttrycket. En funktion måste dock inte ges av en formel. Det enda som krävs är att funktionen är definierad för alla element i definitions mängden, och att den alltid ger samma svar. Vi ger nu ett par

exempel på detta och hur man istället kan beskriva en funktion.

Exempel 1.5.1. Vårt första exempel är absolutbeloppet $|x|$ av ett reellt tal x , som definieras som avståndet på tallinjen från x till origo. Detta är en funktion vars definitionsmängd och målmängd är $\mathbb{R}$. Man kan beräkna den genom att man tar bort eventuella minustecken framför talet, det vill säga

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

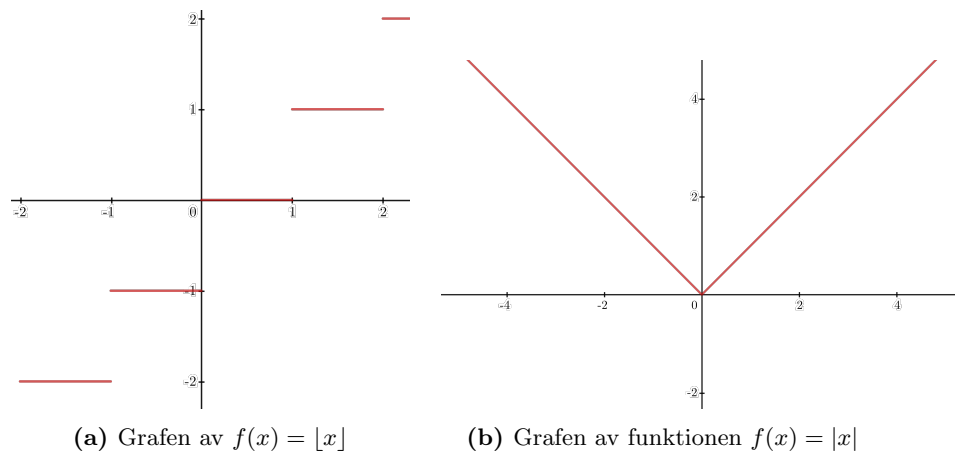
Exempelvis så gäller $|-3| = -(-3) = 3$ och $|2| = 2$. ▲

Exempel 1.5.2. *Golvfunktionen* är funktionen som avbildar reella tal x på heltalet man får när man avrundar x nedåt. Vi benämner den funktionen med $\lfloor \dots \rfloor$. För att förtydliga hur denna och andra funktioner används brukar vi skriva på följande sätt

$$\begin{aligned} \lfloor \dots \rfloor : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor. \end{aligned}$$

eftersom det kanske inte är uppenbart för läsaren att man ska skriva $\lfloor x \rfloor$ när man vill referera till funktionens värde vid punkten x istället för $\lfloor \dots \rfloor_x$ eller $\lfloor \dots \rfloor(x)$. Exempelvis så gäller $\lfloor \pi \rfloor = 3$. ▲

En funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kan beskrivas genom sin *graf*, som definieras som mängden av punkter i planet på formen $(x, f(x))$.

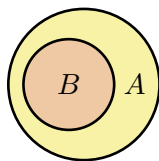


Figur 1.4: Golv- och absolutbeloppsfunktionen.

1.6 Mängdoperationer

I detta avsnitt ska vi beskriva ett antal olika sätt att från en eller flera mängder skapa en ny mängd. Vi kallar dessa för *mängdoperationer*. I nästa kapitel kommer vi även att se hur vissa av dessa mängdoperationer går att generalisera till andra situationer.

För att illustrera mängder använder man ibland *Vennndiagram*, efter matematikern John Venn (1834–1923). Där representeras mängder som enkla former, oftast cirklar, och formernas förhållanden till varandra motsvarar mängdernas. Till exempel kan man illustrera att B är en delmängd av A genom att rita dem som två cirklar, där B ligger inuti A .



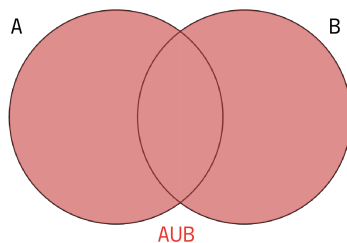
Figur 1.5: Vennndiagram för $B \subset A$.

Unionen

Unionen av mängderna A och B är mängden som består av alla element som ligger i A *eller* i B . Den betecknas med $A \cup B$ och definieras som

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}.$$

Ett exempel är $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.



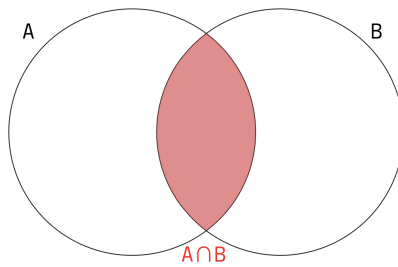
Figur 1.6: Vennndiagram för $A \cup B$.

Snittet

Snittet av mängderna A och B är mängden som består av alla element som ligger i A *och* i B . Den betecknas med $A \cap B$ och definieras som

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \in B\}.$$

Ett exempel är $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.



Figur 1.7: Venndiagram för $A \cap B$.

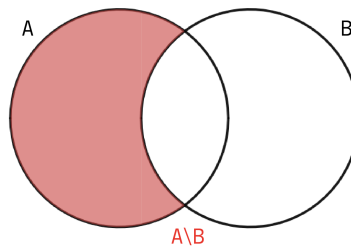
Två mängder A och B sägs vara *disjunkta* om de inte har några gemensamma element, det vill säga om $A \cap B = \emptyset$.

Differensen och komplementet

Differensen av en mängd A och B är mängden som består av alla element som ligger i A men inte i B . Den betecknas med $A \setminus B$ och definieras som

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \notin B\}.$$

Ett exempel är $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$.



Figur 1.8: Venndiagram för $A \setminus B$.

Notera att $A \setminus B$ inte är lika med $B \setminus A$, exempelvis gäller

$$\{2, 3, 4\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4\} \neq \{1\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\}.$$

Om alla uppträdande mängder är delmängder av en viss mer eller mindre underförstådd grundmängd M talar man ofta om $M \setminus A$ som *komplementet* till A (med avseende på M). Vi kommer att beteckna komplementet till A med A^C . Om vi till exempel pratar om mängder av heltal, och vi till exempel betraktar mängden $A = \{1, 2, 3\}$, så avser komplementet till A mängden av alla heltal *förutom* 1, 2 och 3.

Den kartesiska produkten

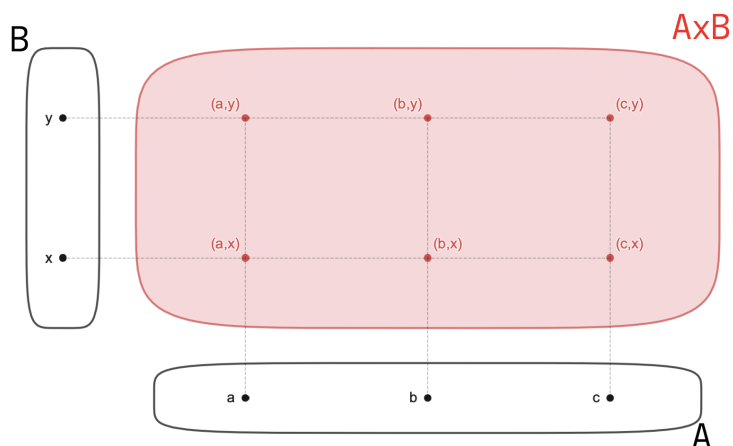
Den *kartesiska produkten* av två mängder A och B är mängden som består av alla par av element så att det första ligger i A och det andra i B . Den betecknas med $A \times B$ och definieras som

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ och } y \in B\}.$$

Två olika exempel är

$$\begin{aligned}\{a, b, c\} \times \{x, y\} &= \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\} \\ \{1, 2, 3\} \times \{2, 3, 4\} &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.\end{aligned}$$

Notera att ordningen är viktig, exempelvis gäller $(1, 2) \in \{1, 2, 3\} \times \{2, 3, 4\}$ men $(2, 1) \notin \{1, 2, 3\} \times \{2, 3, 4\}$.



Figur 1.9: Venn diagram för $A \times B$.

När vi tar den kartesiska produkten av en mängd med sig själv brukar vi använda notationen $A^2 = A \times A$. Mer allmänt skriver vi

$$A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ gånger}} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid \text{alla } a_i \in A\}.$$

Till exempel är det reella talplanet $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vilket vi brukar beteckna med $\mathbb{R}^2$.

1.7 Det euklidiska talplanet och dess delmängder

I det här avsnittet kommer vi studera mängder av ordnade talpar och några egenskaper hos sådana mängder.

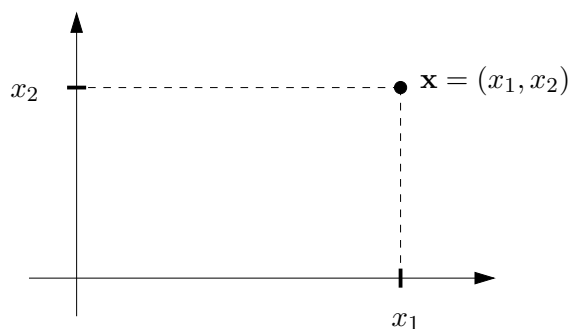
Definition 1.7.1. Det *euklidiska planet*, eller *talplanet*, är mängden

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

som består av alla par (x_1, x_2) av reella tal x_1 och x_2 . Vi använder notationen $\mathbf{x}$ för elementet (x_1, x_2) och tolkar x_1 och x_2 som koordinater för punkten $\mathbf{x}$. Speciellt använder vi notationen $\mathbf{0}$ för punkten $(0, 0)$ som kallas för *origo*.

Notation 1.7.2. När vi skriver för hand, till exempel på föreläsningen, drar vi ofta ett streck ovanför bokstaven istället för att använda fetstil så att till exempel $\mathbf{x}$ betecknas med $\bar{x}$.

Det euklidiska planet är en mängd med många geometriska egenskaper. En sådan egenskap är att vi kan illustrera $\mathbb{R}^2$ med hjälp av ett koordinatsystem.

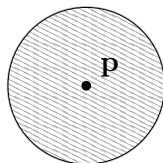


Koordinaterna för varje punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ kan i bilden avläsas från koordinataxlarna. Därför kallar vi koordinataxlarna för x_1 -axeln respektive x_2 -axeln.

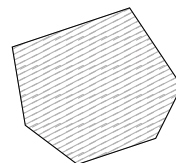
Exempel 1.7.3. I det här avsnittet kommer vi intressera oss för delmängder av $\mathbb{R}^2$. Några exempel på delmängder i $\mathbb{R}^2$ ges nedan.



Figur 1.10: Linjesegmentet från $\mathbf{x}$ till $\mathbf{y}$.



Figur 1.11: En cirkelskiva med mittpunkt $\mathbf{p}$.



Figur 1.12: En månghörning.

Med en cirkelskiva med mittpunkt $\mathbf{p}$ menar vi här mängden av alla punkter med avstånd som mest r från $\mathbf{p}$ för något tal $r > 0$. Vi kallar r för radien av cirkelskivan. Linjesegment och cirkelskivor kommer vi ofta använda framöver och månghörningar kommer vi speciellt studera i Kapitel 2. ▲

Definition 1.7.4. Låt M vara en delmängd av $\mathbb{R}^2$.

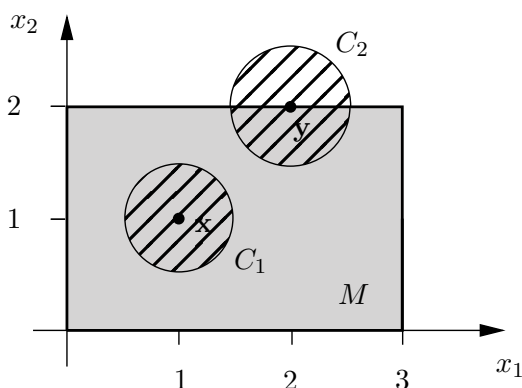
- (i) En punkt $\mathbf{x} \in M$ kallas för en *inre punkt* om det existerar en cirkelskiva C med $\mathbf{x}$ som mittpunkt så att C ligger helt inuti M , det vill säga att $C \subseteq M$. Vi kallar mängden av alla inre punkter för det *inre* av M .

- (ii) En punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ kallas för en *randpunkt* till M om varje cirkelskiva C med $\mathbf{x}$ som mittpunkt har egenskapen att C innehåller både punkter som ligger i M och punkter som ligger utanför M , det vill säga att $C \cap M \neq \emptyset$ och $C \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M) \neq \emptyset$. Vi kallar mängden av alla randpunkter för *randen* av M .

Exempel 1.7.5. Låt M vara mängden

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 3 \text{ och } 0 \leq x_2 \leq 2\}$$

och låt $\mathbf{x} = (1, 1)$ och $\mathbf{y} = (2, 2)$ vara två punkter i M .

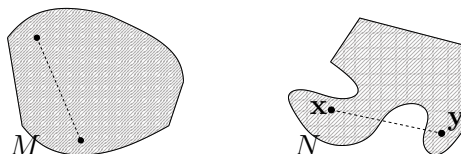


Eftersom cirkelskivan C_1 med $\mathbf{x}$ som mittpunkt ligger helt inuti M så är $\mathbf{x}$ en inre punkt till M . Samtidigt ser vi att cirkelskivan C_2 runt $\mathbf{y}$ innehåller både punkter som ligger i M och punkter som ligger utanför M . Då vi ser att varje cirkelskiva med $\mathbf{y}$ som mittpunkt kommer ha denna egenskap så följer det att $\mathbf{y}$ är en randpunkt till M . ▲

Anmärkning 1.7.6. I Övning 1.27 visas att varje element i en mängd $M \subseteq \mathbb{R}^2$ måste vara en inre punkt eller en randpunkt.

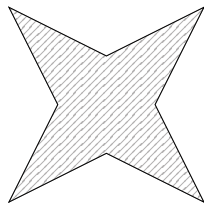
Definition 1.7.7. En delmängd $M \subseteq \mathbb{R}^2$ är *konvex* om det för varje par av punkter $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ gäller att alla punkter på linjesegmentet mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ ligger i M .

Exempel 1.7.8. Här ser vi två mängder M och N .



Eftersom linjesegmentet mellan varje val av två punkter i M också ligger i mängden så är M konvex. Däremot är N inte konvex eftersom N innehåller punkterna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ men inte alla punkter på linjesegmentet mellan dem. ▲

Exempel 1.7.9. Linjesegmentet, cirkelskivan och månghörningen från Exempel 1.7.3 är alla konvexa. Man kan till och med övertyga sig om att varje linjesegment och cirkelskiva är konvex. Det finns dock exempel på månghörningar som *inte* är konvexa, såsom följande figur.



Övningar

Övning 1.1 (★). Lista elementen i följande mängder.

- (i) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$.
- (ii) $B = \{1, 2, \{2, 3\}\}$.
- (iii) $C = \{k \in \mathbb{Z} \mid k^2 < 16\}$.
- (iv) $A \cap B$.
- (v) $(C \setminus A) \cup B$.

Övning 1.2 (★). Lista elementen i följande mängder.

- (i) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$.
- (ii) $B = \{0, 1, 2, 3\}$.
- (iii) $C = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{N}, 0 \leq p < 3 \text{ och } 1 \leq q < 3\}$.
- (iv) $(B \cup A) \cap C$.
- (v) $(C \cap B) \setminus A$.

Övning 1.3 (★). För nedanstående par av mängder A och B , avgör om A och B är lika, disjunkta, någon av dem är en äkta delmängd av den andra eller ingetdera.

- (i) $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 1, 2\}$.
- (ii) $A = \{0, 1, 2\}$ och $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 9\}$.
- (iii) $A = \{\{\}\}$ och $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x = -2\}$.
- (iv) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ och $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 1\}$.
- (v) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$ och $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$.

Övning 1.4 (★). För nedanstående par av mängder A och B , avgör om A och B är lika, disjunkta eller någon av dem är en äkta delmängd av den andra.

- (i) $A = \{-2, 0, 2\}$ och $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3 \text{ och } x \text{ är jämnt}\}.$
- (ii) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ och $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}.$
- (iii) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ är jämnt}\}$ och $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ är kvadrattal}\}.$
- (iv) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = -2\}$ och $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x = 2\}.$
- (v) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ och $B = \{\emptyset\}.$

Övning 1.5 (★). Använd mängdbyggaren för att definiera följande mängder.

- (i) Mängden av jämna, positiva heltal.
- (ii) Mängden av rationella tal r så att $2r$ är ett heltal.
- (iii) Mängden av irrationella tal som ligger inom avstånd 1 från origo.

Övning 1.6 (★). Använd mängdbyggaren för att definiera följande mängder.

- (i) Mängden av alla kvadrattal som är större än 2.
- (ii) Mängden av rationella lösningar till $x^4 + x^2 - 1 = 0.$
- (iii) Mängden av rationella tal som är volymen av en kub med rationella sidor.

Övning 1.7 (★). Ange möjlig definitionsmängd och målmängd för följande funktioner.

- (i) Funktionen som ger det n :te kvadrattalet.
- (ii) Funktionen som beräknar arean av triangel.
- (iii) Funktionen beräknar derivatan av ett andragradspolynom.

Övning 1.8 (★). Ange möjlig definitionsmängd och målmängd för följande funktioner.

- (i) Funktionen som ger arean av cirkel med radie $r.$
- (ii) Funktionen som ger avståndet mellan 1 och ett tal r på tallinjen.
- (iii) Funktionen som ger de rationella nollställena till ett förstgradspolynom med rationella koefficienter.

Övning 1.9 (★). Är följande funktioner eller inte? Om inte, motivera varför.

- (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ där

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{om } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (ii) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ där $f(n) = \sqrt{n}$.
- (iii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ så att $f(x) = 0$ med sannolikhet $1/2$ och $f(x) = 1$ med sannolikhet $1/2$.
- (iv) $f : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ där $f(0) = 1$ om ordet Balkong börjar på B.

Övning 1.10 (★). Är följande funktioner eller inte? Om inte, motivera varför.

- (i) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, där $f(n)$ är siffersumman i det vanliga (decimala) talsystemet. Obs, alla *siffror* är icke-negativa.
- (ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$, där $f(x) = x/2$.
- (iii) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, där $f(n) = \sqrt[n+1]{n+1}$.
- (iv) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$, där $f(p/q) = p$.

Övning 1.11 (★). Avgör om följande funktioner är lika eller inte? Motivera varför.

- (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2}$.
- (ii) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(n) = 1/n$ och $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, $g(m) = 1/m$.
- (iii) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(n) = n/(n+1)$ och $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(z) = z/(z+1)$.

Övning 1.12 (★). Avgör om följande funktioner är lika eller inte? Om inte, motivera varför.

- (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)^2$.
- (ii) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$ och $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g(x) = |x|^2$.

Övning 1.13 (★★). Visa att A och B är disjunkta om och endast om $A \setminus B = A$.

Övning 1.14 (★★). Visa att för två mängder A, B så uppfyller operationerna $\cup, \cap, A^C$ (där A^C betecknar mängdkomplement) följande räkneregler,

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

Övning 1.15 (★★). Visa att följande räkneregler håller

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Övning 1.16 (★★). Visa att sammansättningen av två bijektioner är en bijektion.

Övning 1.17 (★). Visa att antalet element i $A \times B$ är produkten av antalet element i A och antalet element i B .

Övning 1.18 (★★). Visa att den kartesiska produkten av två delmängder är delmängd till den kartesiska produkten av grundmängderna. Alltså om $B \subset A$ och $Y \subset X$ gäller det att

$$B \times Y \subset A \times X.$$

Övning 1.19 (★). Använd ett direkt bevis för att bevisa att om n är ett jämnt tal så är $n + 1$ ett udda tal (detta är Sats 1.1.4).

Övning 1.20 (★). Använd ett direkt bevis för att bevisa att om n är udda så är n^2 udda.

Övning 1.21 (★). Använd ett motsägelsebevis för att bevisa att summan av ett irrationellt tal och ett rationellt tal är irrationellt.

Övning 1.22 (★). Använd ett motsägelsebevis för att bevisa att om $a + b \geq c$ så är antingen $a \geq c/2$ eller $b \geq c/2$.

Övning 1.23 (★★). Bevisa att om $ab = c$ så är $a \geq \sqrt{c}$ och $b \leq \sqrt{c}$, eller tvärtom.

Övning 1.24 (★). Bevisa att det finns två irrationella tal a och b så att a^b är rationellt. Tips: använd att $\sqrt{2}$ är irrationellt.

Övning 1.25 (★★). Bevisa att alla rationella tal kan skrivas som en produkt av två irrationella tal.

Övning 1.26 (★). Visa följande påståenden för heltalen (du bör använda det du bevisat i ena för att bevisa nästa).

- (i) Multiplikation med ett positivt tal bevarar olikheter. Alltså för $m > 0$ gäller

$$r \leq n \implies mr \leq mn.$$

- (ii) Ett positivt heltal kan inte dela ett mindre positivt heltal. Alltså

$$0 < r < n \implies n \text{ delar inte } r.$$

- (iii) Differensen av två heltal delbara med n är också delbar med n .

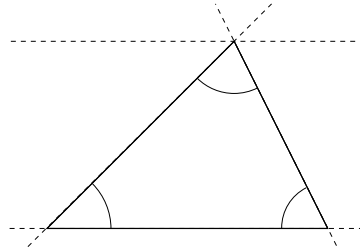
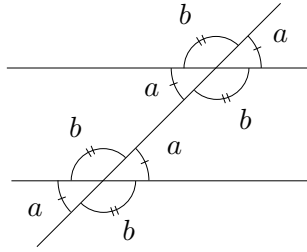
Övning 1.27 (★★). Låt M vara en delmängd av $\mathbb{R}^2$ och låt $\mathbf{x} \in M$ vara en punkt. Visa att $\mathbf{x}$ är en inre punkt eller en randpunkt till M .

Övning 1.28 (★★). Låt M vara mängden

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x_1 \leq 4, 1 \leq x_2 < 3\}.$$

Notera att en av olikheterna i definitionen av M är strikt. Rita mängden M och avgör vilka av punkterna $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 4)$, $(2, 3)$ som ligger i M . Avgör även vilka av dessa som är inre punkter till M och vilka som är punkter på randen till M .

Övning 1.29 (★★). Om två parallella linjer skärs av en tredje linje enligt den vänstra figuren nedan är de markerade vinklarna lika stora. Använd denna egenskap för att visa att summan av vinklarna i en triangel är 180° med hjälp av den högra figuren.



Övning 1.30 (★★). Här betraktar vi den tomma mängden $\emptyset$.

- (i) Visa att $\emptyset$ är en delmängd av $\mathbb{R}^2$.
- (ii) Är $\emptyset$ konvex?

2 Polygoner

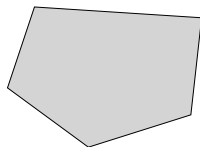
Ordet *polygon* är ett finare ord för månghörning och härstammar från grekiskans *poly* som betyder *flera* och *gon* som betyder *vinkel*. Trots själva ordets ursprung har människor intresserat sig för polygoner och geometri betydligt längre tillbaka i tiden än antikens Grekland. Till exempel har man hittat tre till fyra tusen år gamla skrifter från dåtidens Egypten som bland annat beskriver hur arean av en triangel kan beräknas. Än idag används månghörningar flitigt och samma trianglar som egyptierna nedtecknade används nu inom till exempel datorgrafik och naturvetenskap. Även inom matematiken finns det mycket kvar att upptäcka om polygoner och deras högre dimensionella motsvarigheter.

Vi börjar här med att ge en ordentlig definition av vad en polygon är och visar sedan *Picks sats* som är ett uttalande om polygoner som "bara" är cirka 100 år gammalt.

2.1 Definition av polygoner

Definition 2.1.1. En konvex delmängd P av $\mathbb{R}^2$ som innehåller sin rand och har ett icke-tomt inre kallas för en (konvex) *polygon* om randen till P består av ändligt många linjesegment som innesluter P .

Exempel 2.1.2. Figuren nedan är en polygon.

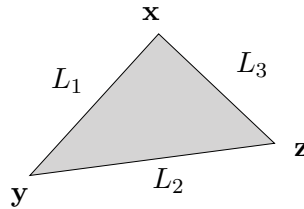


Vi noterar att dess rand består av fem stycken linjesegment som innesluter polygonen och att polygonen har ett icke-tomt inre. ▲

Anmärkning 2.1.3. Anledningen till att vi kräver att en polygon måste ha inre punkter är att vi vill förhindra P från att vara ett linjesegment, en punkt eller tomma mängden. Det finns många som intresserar sig för mer generella typer av månghörningar än polygoner så som vi definierat dem. Till exempel kan man även tillåta icke-konvexa polygoner. För att resultaten i det här kompendiet ska vara giltiga är det dock viktigt att vi använder oss av begreppet polygon enligt Definition 2.1.1.

Definition 2.1.4. Låt P vara en polygon. Ett maximalt linjesegment på randen av P kallas för en *kant* av P . Med maximalt menar vi här att linjesegmentet inte kan förlängas och fortfarande vara en del av randen av P . En punkt som ligger i skärningen av två olika kanter kallas för ett *hörn* av P .

Exempel 2.1.5. Betrakta följande triangel.



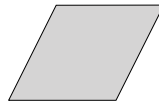
Detta är en polygon där hörnen ges av punkterna $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$, och kanterna är linjesegmenten L_1 , L_2 och L_3 . ▲

Exempel 2.1.6. En polygon vars kanter alla har samma längd och vars hörn alla har lika stora vinklar kallas för en *reglbunden* polygon.



Här ser vi exempel på reglbundna polygoner med 3, 4, 5 och 6 hörn. ▲

Exempel 2.1.7. Ett exempel på en polygon vars sidor är lika långa men som *inte* är reglbunden är en romb.



▲

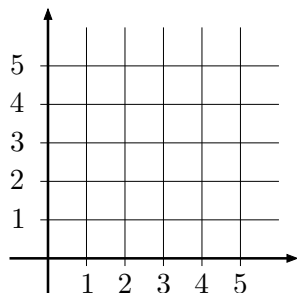
Definition 2.1.8. Mängden

$$\mathbb{Z}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$$

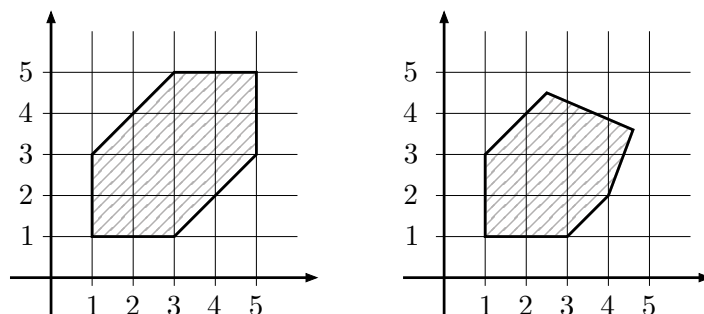
kallas för *gitter* i $\mathbb{R}^2$ och en punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$ kallas för en *gitterpunkt*. Med andra ord består gittert $\mathbb{Z}^2$ av alla punkter i $\mathbb{R}^2$ med heltalskoordinater. Om alla hörn i en polygon P är gitterpunkter så kallas P för en *gitterpolygon*.

I den här kursen kommer vi mest intressera oss för gitterpolygoner. En motivering för att studera gitterpolygoner, snarare än polygoner rent allmänt, är att gitterpolygoner har flera vackra och spännande egenskaper som generella polygoner saknar. Ett exempel på en sådan egenskap kommer vi se i nästa avsnitt.

Exempel 2.1.9. Man kan illustrera gittert $\mathbb{Z}^2$ som skärningspunkterna i ett rutnät som i figuren nedan.



Betrakta nu följande polygoner.

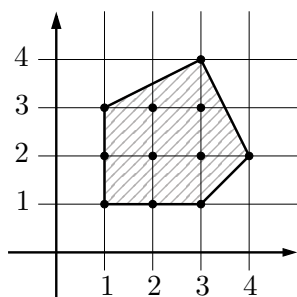


Eftersom alla hörn i den vänstra figuren är gitterpunkter så är polygonen en gitterpolygon. Polygonen till höger har två hörn som inte är gitterpunkter och är därför *inte* en gitterpolygon. ▲

2.2 Picks sats

En speciell egenskap hos gitterpolygoner är att deras area är bestämd av deras gitterpunkter. Detta resultat är känt som Picks sats efter Georg Alexander Pick som bevisade detta år 1899. Notera att mängden av gitterpunkter hos en polygon P är mängden $P \cap \mathbb{Z}^2$. Vi inleder med ett par exempel.

Exempel 2.2.1. Låt oss betrakta följande gitterpolygon.



Från Övning 2.1 framgår att arean av polygonen är $\frac{13}{2}$. Samtidigt har polygonen fyra gitterpunkter i sitt inre och sju stycken gitterpunkter på randen.

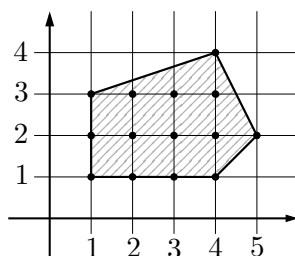
Vad som kan verka som ett mystiskt sammanträffande är att

$$\text{Antal inre gitterpunkter} + \frac{\text{Antal gitterpunkter på randen}}{2} - 1 = 4 + \frac{7}{2} - 1 = \frac{13}{2},$$

vilket var lika med polygonens area. Picks sats säger att motsvarande samband gäller för alla gitterpolygoner. ▲

Man kan tro att formeln vi just såg är en ren tillfällighet så innan vi går vidare testar vi den i ett annat exempel.

Exempel 2.2.2. Betrakta gitterpolygonen nedan.



Polygonen har sex inre gitterpunkter och åtta gitterpunkter på sin rand. Vi noterar att

$$6 + \frac{8}{2} - 1 = 9$$

och att detta är precis arean av polygonen, se Övning 2.1. ▲

I exemplen ovan ges alltså arean av en gitterpolygon P av uttrycket

$$\text{Area}(P) = i + \frac{r}{2} - 1$$

där i är antalet inre gitterpunkter och r är antalet gitterpunkter på polygonens rand. Än så länge vet vi bara att denna formel gäller i de två fallen ovan, men man kan faktiskt bevisa att den är sann för alla gitterpolygoner och resultatet kallas för Picks sats. Vi bevisar detta i Sats 2.2.10 men för att genomföra beviset behöver vi lite mer förberedande teori.

Anmärkning 2.2.3. I exemplen ovan och i resten av det här kompendiet använder vi konventionen att enheten för arean hos en gitterpolygon ges av gittret. Konventionen innebär till exempel att kvadraten med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$ har area 1.

Definition 2.2.4. Låt P vara en gitterpolygon och låt $\mathbf{x} \in P$ vara en gitterpunkt. Vi definierar *vikten av* $\mathbf{x}$, $v_P(\mathbf{x})$ enligt nedan.

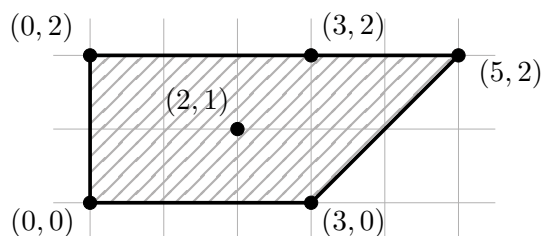
- (i) Om $\mathbf{x}$ är en inre punkt så är $v_P(\mathbf{x}) = 1$.
- (ii) Om $\mathbf{x}$ är en punkt på randen som inte är en hörnpunkt så är $v_P(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}$.
- (iii) Om $\mathbf{x}$ är en hörnpunkt så är $v_P(\mathbf{x}) = \frac{\theta}{360^\circ}$ där θ är vinkeln i hörnet $\mathbf{x}$.

Vi betecknar summan av vikterna av gitterpunkterna i P med $V(P)$, det vill säga att

$$V(P) = \sum_{\mathbf{x} \in P \cap \mathbb{Z}^2} v_P(\mathbf{x}).$$

Slutligen definierar vi $v_P(\mathbf{y}) = 0$ för alla gitterpunkter $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ som inte ligger i P .

Exempel 2.2.5. Betrakta polygonen med sex markerade punkter nedan.



Eftersom $(2,1)$ är en inre punkt så är $v_P((2,1)) = 1$. Vidare ser vi att $(3,2)$ är en randpunkt som inte är ett hörn, så $v_P((3,2)) = \frac{1}{2}$. Punkten $\mathbf{0} = (0,0)$ är ett hörn med vinkel 90° så $v_P((0,0)) = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$. Att beräkna vikten av de övriga punkterna lämnas till Övning 2.2. ▲

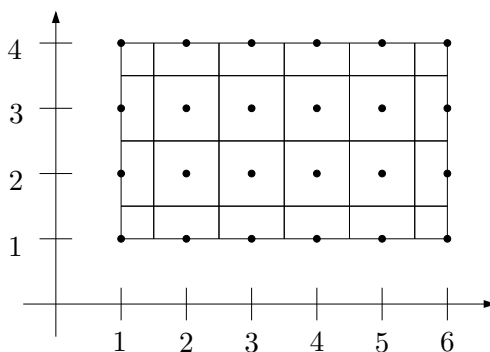
Det kommer visa sig att vikten $V(P)$ av en gitterpolygon P är lika med arean av polygonen. Vi börjar med att visa detta för vissa speciella polygoner.

Hjälpssats 2.2.6. Låt R vara en rektangel med hörn i gitterpunkter och vars sidor är parallella med x_1 -axeln respektive x_2 -axeln. Då är $V(R) = \text{Area}(R)$.

Bevis. Låt $\mathbf{x} \in R$ vara en gitterpunkt. Då är $\mathbf{x}$ antingen ett hörn, en randpunkt som inte är ett hörn eller en inre punkt. I rektanglar gäller att vinklarna i alla hörn är 90° vilket betyder att

$$v_R(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{om } \mathbf{x} \text{ är en inre punkt,} \\ \frac{1}{2} & \text{om } \mathbf{x} \text{ är en randpunkt som ej är ett hörn,} \\ \frac{1}{4} & \text{om } \mathbf{x} \text{ är en hörnpunkt.} \end{cases}$$

Eftersom sidorna av R är parallella med x_1 -axeln respektive x_2 -axeln kan vi beräkna arean av R genom att dela in R i mindre rektanglar som i följande exempel.



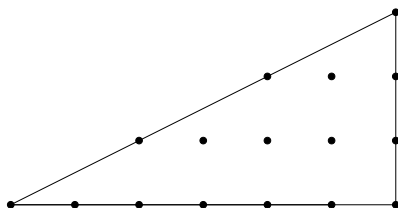
Genom en sådan indelning har vi att varje inre gitterpunkt svarar mot en kvadrat med area 1, vilket är precis vikten av en sådan punkt. På samma sätt svarar en hörnpunkt mot en kvadrat med area $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, vilket är lika med hörnpunktens vikt. En randpunkt som inte är ett hörn svarar mot en rektangel med area $1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, vilket också är lika med en sådan punkts vikt.

Hela rektangelns area är lika med summan av areorna av de mindre rektangelarna. Eftersom arean av varje mindre rektangel är lika med vikten av motsvarande gitterpunkt följer att $V(R) = \text{Area}(R)$. $\square$

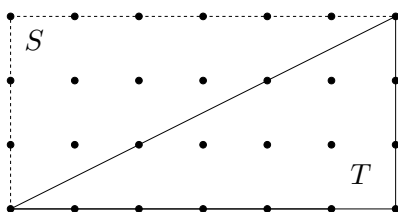
Hjälpssats 2.2.7. Låt T vara en triangel med hörn i gitterpunkter. Då är $V(T) = \text{Area}(T)$.

Bevis. Vi delar upp beviset av detta i två fall.

- (i) Låt oss börja med att visa satsen i fallet då T är en rätvinklig triangel vars kateter är parallella med x_1 -axeln respektive x_2 -axeln. Exempelvis:



Vi låter nu S vara en kopia av T . Genom att placera denna kopia, roterad ett halvt varv, så att de två triangelarna möts längs sina hypotenusor, kan vi skapa en rektangel R vars sidor är parallella med x_1 -axeln respektive x_2 -axeln.

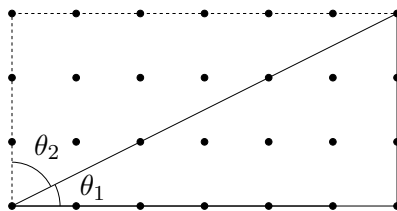


Varje gitterpunkt i T eller S som inte ligger längs med hypotenusan kommer ha samma vikt i R som i den triangel som innehåller den. Detta är sant eftersom om en punkt inte ligger längs med hypotenusan så ligger den i precis en av triangelarna T och S .

Betrakta nu en gitterpunkt $\mathbf{x}$ som ligger längs med hypotenusan av T och S men som inte är ett hörn. Då är $\mathbf{x}$ en inre punkt i rektangeln R och vikten av en sådan är 1. Samtidigt gäller att $v_T(\mathbf{x}) = v_S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}$ så det följer att

$$v_R(\mathbf{x}) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = v_T(\mathbf{x}) + v_S(\mathbf{x}).$$

Om $\mathbf{x}$ istället är ett hörn längs med hypotenusan i T så kommer $\mathbf{x}$ samtidigt vara ett hörn längs hypotenusan i S . Låt vinkeln för hörnet $\mathbf{x}$ i T vara θ_1 och vinkeln för hörnet $\mathbf{x}$ i S vara θ_2 .



Eftersom $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$, vilket är lika med vinkeln för hörnet $\mathbf{x}$ i rektangeln R , följer det att

$$v_T(\mathbf{x}) + v_S(\mathbf{x}) = \frac{\theta_1}{360^\circ} + \frac{\theta_2}{360^\circ} = \frac{90^\circ}{360^\circ} = v_R(\mathbf{x}).$$

Då vikten av en punkt är 0 om punkten ligger utanför mängden så har vi nu visat att det för alla $\mathbf{x}$ gäller att $v_R(\mathbf{x}) = v_T(\mathbf{x}) + v_S(\mathbf{x})$. Det följer därmed att $V(R) = V(T) + V(S)$. Då S är en kopia av T så är $V(T) = V(S)$ och vi drar slutsatsen att

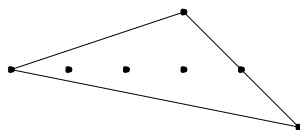
$$V(R) = V(T) + V(S) = 2V(T).$$

Slutligen har vi i Hjälpsats 2.2.6 visat att $V(R) = \text{Area}(R)$ och således måste det gälla att

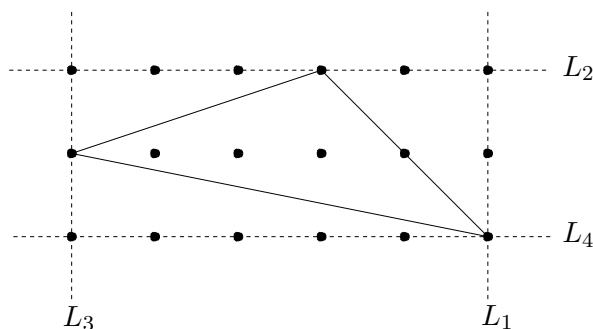
$$V(T) = \frac{1}{2}V(R) = \frac{1}{2}\text{Area}(R) = \text{Area}(T),$$

där vi i sista steget använde att arean av triangeln T är precis hälften av arean av rektangeln R .

- (ii) Låt nu T vara en godtycklig triangel med hörn i gitterpunkter. För att förklara metoden vi kommer använda illustrerar vi tillvägagångssättet med ett exempel:



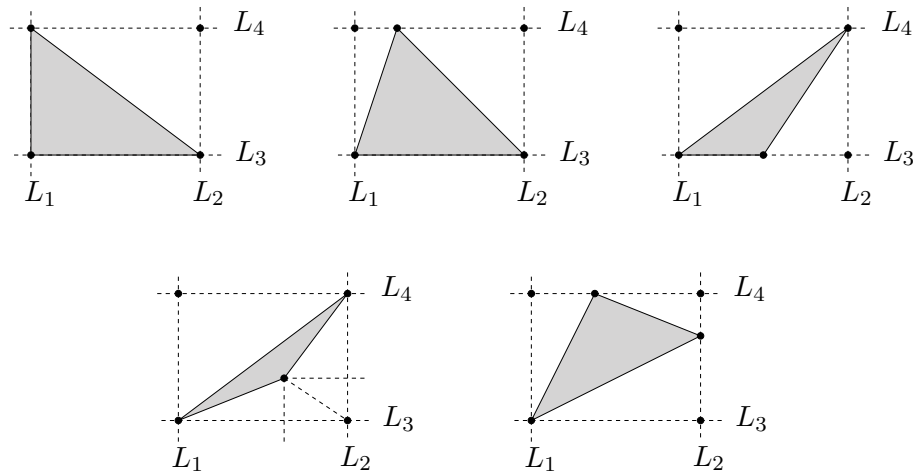
I exemplet kan vi rita horisontella och vertikala linjer som nedan,



som stänger in vår triangel i en rektangel R med gitterpunkter som hörn och vars sidor är parallella med x_1 -axeln respektive x_2 -axeln. Denna konstruktion kommer även göra att T delar in rektangeln i ett antal bitar som alla har hörn i gitterpunkter. I Övning 2.9 visas att dessa bitar består av rätvinkliga trianglar $T_1, T_2, \dots, T_k$ för något $k \in \mathbb{N}$. Därmed har vi att

$$R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k.$$

Vidare är kateterna i T_i parallella med x_1 -axeln respektive x_2 -axeln för alla $i = 1, 2, \dots, k$. Antalet rätvinkliga trianglar som behövs beror på P . I vårt exempel har vi tre trianglar T_1, T_2 och T_3 . I allmänhet gäller, upp till att rotera figuren, att alla möjliga sådan uppdelningar är av någon av de typer som illustreras nedan (där vi enbart markerat hörnen och inga övriga gitterpunkter).



Enligt samma resonemang som i (i) får vi nu att

$$V(R) = V(T) + V(T_1) + V(T_2) + \dots + V(T_k),$$

samtidigt som

$$\text{Area}(R) = \text{Area}(T) + \text{Area}(T_1) + \text{Area}(T_2) + \dots + \text{Area}(T_k).$$

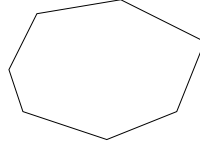
Enligt Hjälpsats 2.2.6 är $\text{Area}(R) = V(R)$ för rektangeln R och enligt (i) har vi att $\text{Area}(T_i) = V(T_i)$ för $i = 1, 2, \dots, k$. Därmed drar vi slutsatsen att

$$\begin{aligned} V(T) &= V(R) - V(T_1) - V(T_2) - \dots - V(T_k) = \\ &= \text{Area}(R) - \text{Area}(T_1) - \text{Area}(T_2) - \dots - \text{Area}(T_k) = \\ &= \text{Area}(T). \end{aligned}$$

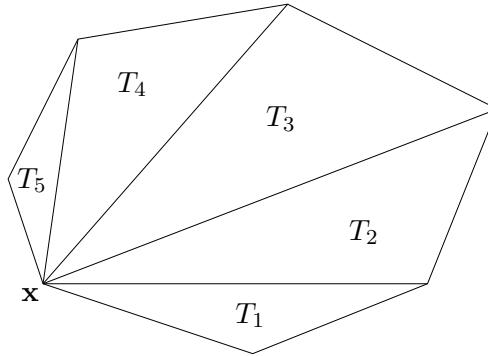
□

Hjälpsats 2.2.8. Låt P vara en gitterpolygon. Då gäller att $V(P) = \text{Area}(P)$.

Bevis. Tag en godtycklig gitterpolygon P . Vi väljer återigen att illustrera vår bevismetod med ett exempel:



Genom att välja ett hörn $\mathbf{x}$ och dra streck från det hörnet till alla andra hörn av polygonen så skapas en så kallad *triangulering* av P . En triangulering är ett sätt att skriva P som en union av trianglar $T_1, T_2, \dots, T_k$ så att varje icke-tom skärning mellan varje par av olika trianglar T_i och T_j antingen är ett hörn eller en kant i både T_i och T_j .

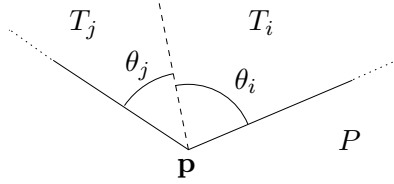


I vårt exempel ser vi till exempel att skärningen av trianglarna T_1 och T_2 är en kant och att skärningen av trianglarna T_1 och T_3 är hörnet $\mathbf{x}$. En anledning till att vi gjorde detta är för att vi nu kan skriva arean av P som summan av areorna av trianglarna, $\text{Area}(P) = \text{Area}(T_1) + \dots + \text{Area}(T_k)$. Tag nu en punkt $\mathbf{p} \in P$. Vi får då några olika fall att undersöka.

- (i) Om $\mathbf{p}$ är en inre punkt av P så finns två möjligheter. Den ena möjligheten är att $\mathbf{p}$ är en inre punkt i precis en triangel T_i för något $i = 1, 2, \dots, k$. Då gäller att $v_P(\mathbf{p}) = 1 = v_{T_i}(\mathbf{p})$. Den andra möjligheten är att $\mathbf{p}$ ligger på en kant av en triangel T_i och då måste $\mathbf{p}$ också ligga på kanten av precis en annan triangel T_j för något $j \neq i$. Därmed gäller att $\mathbf{p}$ är en randpunkt som inte är ett hörn i både T_i och T_j . Då gäller att $v_{T_i}(\mathbf{p}) = v_{T_j}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}$ så vi har att

$$v_P(\mathbf{p}) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = v_{T_i}(\mathbf{p}) + v_{T_j}(\mathbf{p}).$$

- (ii) Om $\mathbf{p}$ är en randpunkt till P som inte är ett hörn så gäller att $\mathbf{p}$ ligger i precis en triangel T_i för något $i = 1, 2, \dots, k$. I så fall gäller det att $v_P(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} = v_{T_i}(\mathbf{p})$.
- (iii) Om $\mathbf{p}$ är ett hörn i P så ser vi från bilden att $\mathbf{p}$ i så fall är ett hörn i antingen en, två, eller alla trianglar. I fallet då $\mathbf{p}$ är ett hörn i precis en triangel T_i så är vikten $v_P(\mathbf{p}) = v_{T_i}(\mathbf{p})$. Om $\mathbf{p}$ är ett hörn i precis två trianglar T_i och T_j så låter vi θ_i vara vinkeln för $\mathbf{p}$ i T_i och θ_j vara vinkeln för $\mathbf{p}$ i T_j .



Då gäller att vinkeln för $\mathbf{p}$ i P är $\theta_i + \theta_j$ så

$$v_P(\mathbf{p}) = \frac{\theta_i + \theta_j}{360^\circ} = \frac{\theta_i}{360^\circ} + \frac{\theta_j}{360^\circ} = v_{T_i}(\mathbf{p}) + v_{T_j}(\mathbf{p}).$$

Det sista fallet är att $\mathbf{p}$ är ett hörn i alla trianglar $T_1, \dots, T_k$, det vill säga att $\mathbf{p} = \mathbf{x}$. På samma sätt som ovan får vi då att

$$v_P(\mathbf{p}) = v_{T_1}(\mathbf{p}) + \dots + v_{T_k}(\mathbf{p}).$$

Vi har nu visat att $v_P(\mathbf{p}) = v_{T_1}(\mathbf{p}) + \dots + v_{T_k}(\mathbf{p})$ för alla gitterpunkter $\mathbf{p} \in P$. Därmed gäller det att

$$V(P) = V(T_1) + V(T_2) + \dots + V(T_k).$$

Enligt Hjälpssats 2.2.7 är $V(T_i) = \text{Area}(T_i)$ för godtyckliga gittertrianglar T_i så det följer att

$$V(P) = V(T_1) + V(T_2) + \dots + V(T_k) = \text{Area}(T_1) + \dots + \text{Area}(T_k) = \text{Area}(P)$$

och därmed har vi att $V(P) = \text{Area}(P)$. $\square$

Vi är nu nära ett bevis av Picks sats. Det sista vi behöver är ett sätt att relatera vikten $V(P)$ av en gitterpolygon P med antalet gitterpunkter i P . Följande resultat ger en direkt koppling mellan antalet hörn av en gitterpolygon och vikten av hörnen.

Hjälpssats 2.2.9. *Låt P vara en gitterpolygon med n stycken hörn. Då gäller att summan av vikterna av hörnen till P är $\frac{n-2}{2}$.*

Bevis. Se Övning 2.3. $\square$

Sats 2.2.10 (Picks sats). *Låt P vara en gitterpolygon med r stycken gitterpunkter längs randen och i stycken gitterpunkter i dess inre. Då gäller att*

$$\text{Area}(P) = i + \frac{r}{2} - 1.$$

Bevis. Låt R vara mängden av gitterpunkter på randen till P , låt I vara mängden av inre gitterpunkter till P och låt n vara antalet hörn till P . Vi börjar med att beräkna vikten $V(P)$.

Genom att införa H att vara mängden av hörnpunkter till P har vi att $R \setminus H$ är mängden av gitterpunkter på randen till P som inte är hörnpunkter. Eftersom

varje gitterpunkt till P måste ligga i precis en av de tre mängderna I , $R \setminus H$ och H följer att

$$V(P) = \sum_{\mathbf{x} \in P \cap \mathbb{Z}^2} v_P(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x} \in I} v_P(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{x} \in R \setminus H} v_P(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{x} \in H} v_P(\mathbf{x}).$$

Vidare har vi att varje inre gitterpunkt i P har vikt 1 och det finns precis i stycken sådana, så $\sum_{\mathbf{x} \in I} v_P(\mathbf{x}) = 1 \cdot i = i$. Varje gitterpunkt $\mathbf{x}$ på randen som inte är ett hörn har vikt $v_P(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}$ och det finns precis $r - n$ stycken sådana randpunkter, där r är det totala antalet gitterpunkter på randen av P . Därmed är $\sum_{\mathbf{x} \in R \setminus H} v_P(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(r - n)$. Enligt Hjälpsats 2.2.9 är summan av vikterna av hörnpunkterna lika med $\frac{n-2}{2}$, så $\sum_{\mathbf{x} \in H} v_P(\mathbf{x}) = \frac{n-2}{2}$. Detta ger att

$$V(P) = \sum_{\mathbf{x} \in I} v_P(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{x} \in R \setminus H} v_P(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{x} \in H} v_P(\mathbf{x}) = i + \frac{1}{2}(r - n) + \frac{n-2}{2} = i + \frac{r}{2} - 1.$$

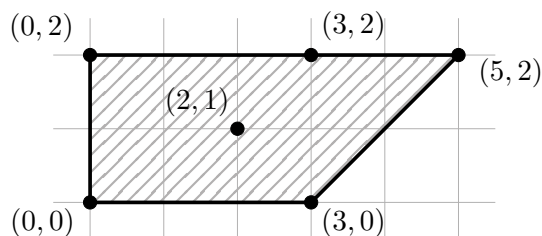
Enligt Hjälpsats 2.2.8 har vi slutligen att $\text{Area}(P) = V(P)$ så det följer att

$$\text{Area}(P) = i + \frac{r}{2} - 1. \quad \square$$

Övningar

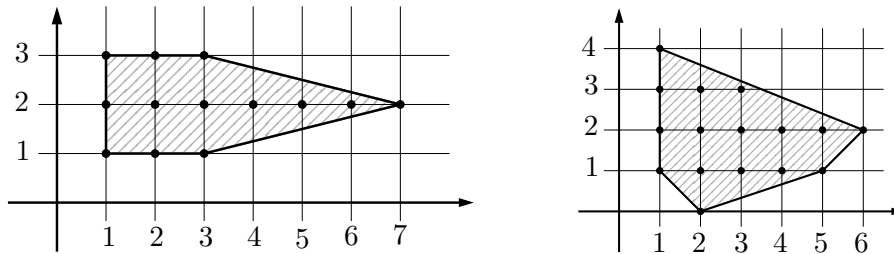
Övning 2.1 (★). Beräkna arean av polygonen i Exempel 2.2.1 genom att dela in den i rektanglar och rätvinkliga trianglar och summera areorna. Beräkna arean av polygonen i Exempel 2.2.2 på samma sätt.

Övning 2.2 (★★). Beräkna vikterna av punkterna $(3, 0)$, $(0, 2)$ och $(5, 2)$ i följande polygon tagen från Exempel 2.2.5.

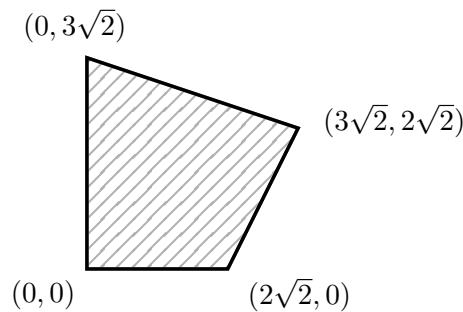


Övning 2.3 (★★). Visa att summan av vikterna av hörnen i en polygon P med n stycken hörn är $\frac{n-2}{2}$. (Ledning: Använd att vinkelsumman av en n -gon är $(n - 2) \cdot 180^\circ$.)

Övning 2.4 (★). Använd Picks sats för att beräkna areorna av följande polygoner.

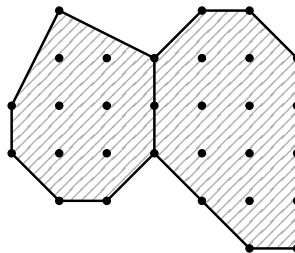


Övning 2.5 (★★). Använd Picks sats för att beräkna arean av följande polygon. (*Ledning:* Alla hörnpunkter är en multipel av $\sqrt{2}$.)



Övning 2.6 (★★). Visa med ett exempel att Picks sats inte gäller för polygoner som inte är gitterpolygoner.

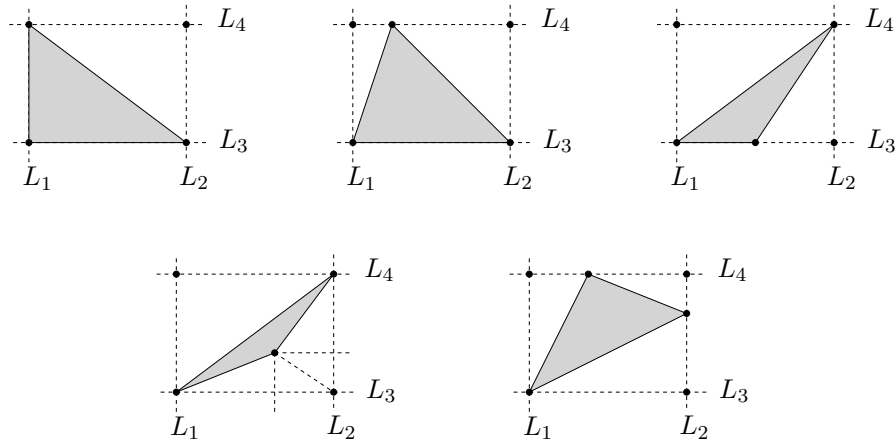
Övning 2.7 (★★★). Visa att Picks sats gäller för *icke*-konvexa månghörningar P som ges av unionen av två allmänna konvexa gitterpolygoner P_1 och P_2 som sätts samman i en kant L som i exempelfiguren nedan.



(*Ledning:* Låt k vara antalet gitterpunkter på L som inte är punkter på randen av P . Hur många inre gitterpunkter har P i termer av k och antalet inre gitterpunkter till P_1 och P_2 ? Vad är antalet gitterpunkter på randen till P i termer av k och antalet gitterpunkter på randen av P_1 och P_2 ?)

Övning 2.8 (★★). En gitterpolygon P har area 5 och har 3 gitterpunkter i sitt inre. Hur många gitterpunkter ligger på randen av P ? Ge två olika förslag på vilken polygon P skulle kunna vara.

Övning 2.9 (★★★). Visa att man till varje gittertriangel P kan lägga till ett antal rätvinkliga gittertriangler $T_1, \dots, T_k$ så att $R = P \cup T_1 \cup \dots \cup T_k$ är en rektangel med hörn i gitterpunkter.



(Ledning: Låt x_1^{min} vara den minsta x_1 -koordinaten av triangelns hörn. Definiera på samma sätt x_2^{min} , x_1^{max} och x_2^{max} . Skapa de vertikala linjerna L_1 och L_2 som går igenom x_1^{min} respektive x_1^{max} . Skapa också de horisontella linjerna L_3 och L_4 som går igenom x_2^{min} respektive x_2^{max} . Låt R vara rektangeln som stängs in av L_1, L_2, L_3 och L_4 . Hur många av hörnen i R kan som minst vara hörn i P ? Dela in beviset i fall beroende på hur många av hörnen i P som är hörn i R . Dra slutsatsen att upp till rotation av polygonen så ges alla möjliga typer av uppdelningar av de fem fallen ovan.)

3 Polytober

Efter att ha studerat polygoner, som är tvådimensionella månghörningar, vill vi nu undersöka månghörningar i högre dimensioner. För att enklare kunna beskriva dessa så börjar vi detta kapitel med att förklara polygoner på ett annat sätt än vad vi gjort tidigare.

Därefter använder vi detta språk för att definiera tredimensionella månghörningar, så kallade *polyedrar*. Precis som med ordet polygon så kommer ordet polyeder från grekiskan och är en sammansättning av ordet *poly* och ordet *hedra* som betyder *basyta*. Detta kan förklaras av att en polyeder är innesluten av ett antal ytor i former av polygoner på samma sätt som en polygon är innesluten av ett antal linjer.

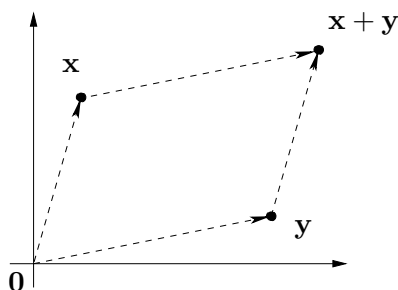
Sedan definierar vi polytober, vilket är månghörningar i allmänna dimensioner. Ordet polytop uppkom sent på 1800-talet i Tyskland som ett samlingsnamn för månghörningar av godtycklig dimension.

3.1 En algebraisk struktur på $\mathbb{R}^2$

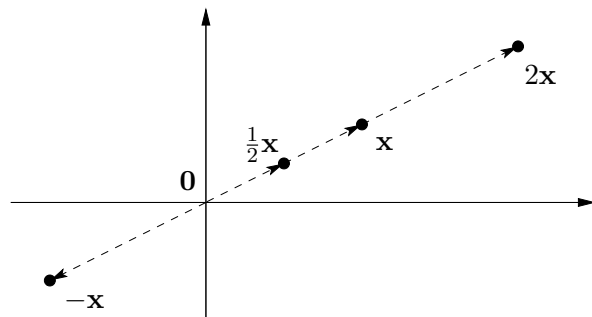
Definition 3.1.1. Låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ vara två punkter i $\mathbb{R}^2$ och låt $\lambda \in \mathbb{R}$ vara ett tal. Då definierar vi

- (i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,
- (ii) $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$,
- (iii) $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}$.

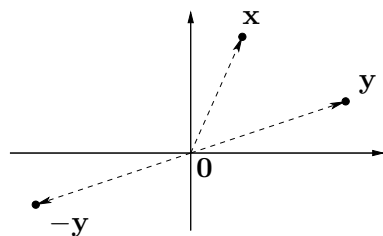
I Kapitel 1 och 2 studerade vi $\mathbb{R}^2$ *geometriskt*, det vill säga genom att betrakta figurer. Definitionen ovan är istället *algebraisk* men har oavsett en underliggande geometrisk idé. Summan $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ av två punkter $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ kan nämligen visualiseras på följande sätt. Vi börjar med att rita pilar från origo till punkterna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. Sedan parallellförflyttar vi en av pilarna och lägger den så att den startar där den andra pilen slutar. Summan $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ges då av punkten som ligger där den pil som vi flyttade slutar. Vilken av pilarna vi väljer att flytta har ingen betydelse som kan ses i följande bild.



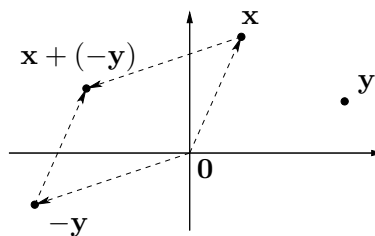
På ett liknande sätt kan vi visualisera hur $\lambda \mathbf{x}$ ser ut geometriskt genom att förlänga pilen från $\mathbf{0}$ till $\mathbf{x}$ med faktorn λ :



Eftersom vi har att $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}$ så kan vi också ge en geometrisk tolkning av differensen $\mathbf{x} - \mathbf{y}$. Vi gör detta i flera steg.

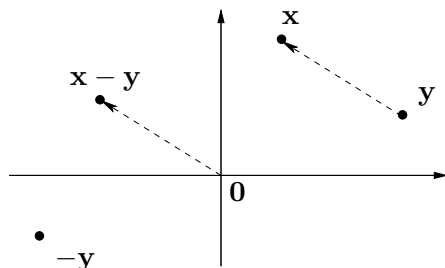


Figur 3.1: Punkterna $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ och $-\mathbf{y}$



Figur 3.2: Punkten $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$

Vi noterar att linjesegmentet mellan origo och punkten $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ har samma längd och är parallell med linjesegmentet mellan $\mathbf{y}$ och $\mathbf{x}$.



Figur 3.3: Linjen från $\mathbf{0}$ till $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ är parallell med linjen från $\mathbf{y}$ till $\mathbf{x}$

Anmärkning 3.1.2. Att som i exemplen ovan betrakta en punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ som en pil från origo till $\mathbf{x}$ som man kan flytta runt är något man går igenom i teorin om vektorer. Vi vill dock oftast betrakta våra punkter som riktiga punkter och inte pilar så denna teori tas inte upp här.

Exempel 3.1.3. Vi beräknar $3\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ där $\mathbf{x} = (2, 1)$ och $\mathbf{y} = (0, 1)$. Enligt Definition 3.1.1 gäller att

$$3\mathbf{x} = 3(2, 1) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 1) = (6, 3) \text{ och } 2\mathbf{y} = (0, 2).$$

Därmed fås att

$$3\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = 3(2, 1) - 2(0, 1) = (6, 3) - (0, 2) = (6 - 0, 3 - 2) = (6, 1). \quad \blacktriangle$$

I kapitel beskrivs vi konvexa mängder i två dimensioner. På liknande sätt kan konvexa mängder för högre dimensioner definieras.

Definition 3.1.4. Låt $n \geq 1$. En konvex mängd $C \subset \mathbb{R}^n$ är en mängd sådan att om $x, y \in C$ gäller för alla $t \in [0, 1]$ att $tx + (1 - t)y \in C$.

3.2 Konvexa höljen

Med den algebraiska strukturen vi nu gett $\mathbb{R}^2$ kan vi konstruera konvexa höljen av ett antal punkter. Detta kommer leda till ett nytt sätt att beskriva polygoner.

Definition 3.2.1. Låt $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ vara ett ändligt antal punkter i $\mathbb{R}^2$. Det *konvexa höljet* av $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ är mängden

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\}$$

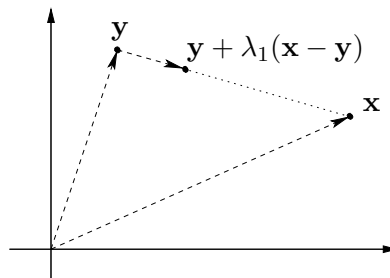
som består av punkter $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ som kan skrivas på formen $\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n$ för några $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ som uppfyller villkoren ovan.

Definitionen ovan kan se något krånglig ut, men det geometriska objektet som den beskriver är förhållandevis enkelt. Det konvexa höljet av ett antal punkter är nämligen den minsta konvexa mängden som innehåller de givna punkterna och är oftast en polygon. Vi kommer rigoröst formulera vad vi menar med detta i Sats 3.2.4. Låt oss dock inleda med ett exempel.

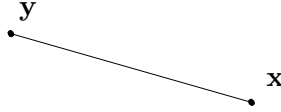
Exempel 3.2.2. Det konvexa höljet av två punkter $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ ges av mängden $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{y} \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ och } \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$. Vi har då att $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ så en punkt i det konvexa höljet kan skrivas på formen

$$\lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x} + (1 - \lambda_1) \mathbf{y} = \mathbf{y} + \lambda_1 (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

för något $0 \leq \lambda_1 \leq 1$. Eftersom vi noterade att linjesegmentet från $\mathbf{0}$ till $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ har samma riktning och längd som linjesegmentet från $\mathbf{y}$ till $\mathbf{x}$ så ligger en punkt på formen $\mathbf{y} + \lambda_1 (\mathbf{x} - \mathbf{y})$ på linjen mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, som framgår från figuren nedan.



Eftersom λ_1 kan anta alla värden mellan 0 och 1 så är $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mängden av alla punkter som ligger på linjesegmentet mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.



Alltså, det konvexa höljet av två punkter $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är lika med linjesegmentet mellan de två punkterna. ▲

Sats 3.2.3. Låt $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^2$ vara tre punkter som inte ligger på en linje. Då är det konvexa höljet $K = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ en triangel med $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ och $\mathbf{x}_3$ som hörn.

Bevis. Varje punkt $\mathbf{p}$ i K är per definition på formen

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ och $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Efter omskrivningen $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - \lambda_3$ skiljer vi på två fall.

Det första fallet är att $\lambda_3 = 1$. Då är $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ eftersom $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - \lambda_3 = 0$ och $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Detta betyder i sin tur att $\mathbf{p} = 0\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3$.

Det andra fallet är att $\lambda_3 \neq 1$, och vi gör då följande räknetrick:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 = (1 - \lambda_3) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} \mathbf{x}_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} \mathbf{x}_2 \right) = (1 - \lambda_3) \mathbf{y},$$

där vi infört $\mathbf{y} = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} \mathbf{x}_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} \mathbf{x}_2$. Notera här att det är viktigt att kräva att $\lambda_3 \neq 1$ för annars så skulle vi dividera med 0! Den stora fördelen med den här omskrivningen ses enklast genom att införa $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3}$ och $\mu_2 = \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3}$. Eftersom $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ och

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 - \lambda_3} = \frac{1 - \lambda_3}{1 - \lambda_3} = 1$$

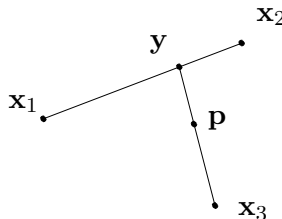
så ser vi att $\mathbf{y}$ ligger i det konvexa höljet av $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$,

$$\mathbf{y} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \{\mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 \mid \mu_1, \mu_2 \geq 0 \text{ och } \mu_1 + \mu_2 = 1\}.$$

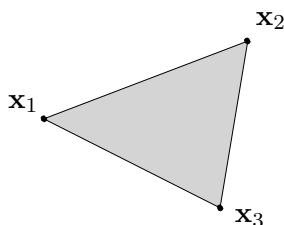
Det konvexa höljet $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ är som vi noterade i Exempel 3.2.2 lika med linjesegmentet mellan $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$. Eftersom vår ursprungliga punkt $\mathbf{p}$ kan skrivas

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 = (1 - \lambda_3) \mathbf{y} + \lambda_3 \mathbf{x}_3$$

har vi på samma sätt att $\mathbf{p}$ tillhör det konvexa höljet $\mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_3)$, vilket är linjesegmentet mellan $\mathbf{y}$ och $\mathbf{x}_3$.



Då $\lambda_3 \neq 1$ innebär detta att vi för varje $\mathbf{y}$ kan, genom att variera λ_3 i intervallet $0 \leq \lambda_3 < 1$, få $\mathbf{p}$ att vara alla punkter på linjesegmentet $\mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_3)$ utom just punkten $\mathbf{x}_3$. Vi vet dock redan att $\mathbf{p} = \mathbf{x}_3$ i fallet $\lambda_3 = 1$. Notera att det är möjligt att variera λ_3 eftersom vi för varje värde av λ_3 kan hitta nya λ_1 och λ_2 mellan 0 och 1 så att kvoterna $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_3}$ och $\mu_2 = \frac{\lambda_2}{1-\lambda_3}$ hålls konstanta (givet nytt λ'_3 , sätt $\lambda'_j = \frac{\lambda_j(1-\lambda'_3)}{1-\lambda_3}$ för $j \in \{1, 2\}$), vilket betyder att punkten $\mathbf{y}$ inte förändras. Därmed får vi att hela linjesegmentet mellan $\mathbf{y}$ och $\mathbf{x}_3$ ligger i K . Slutligen konstaterar vi att genom att variera λ_1 och λ_2 mellan 0 och 1 så kan vi få alla punkter på linjesegmentet mellan $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ som $\mathbf{y}$. Alltså kommer alla linjesegment från $\mathbf{x}_3$ till alla punkter $\mathbf{y}$ på linjesegmentet mellan $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ ligga i K . Därför drar vi slutsatsen att $K = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ är triangeln



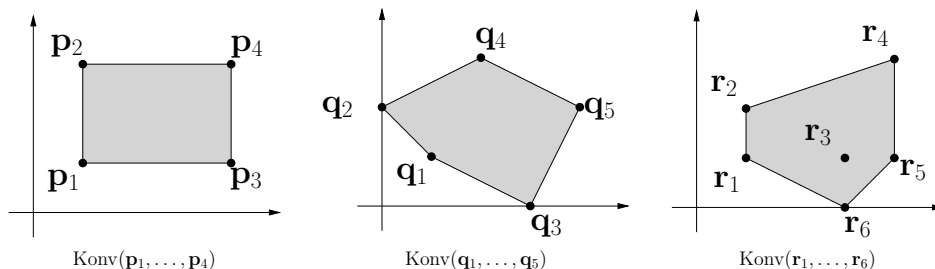
med hörn i punkterna $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ och $\mathbf{x}_3$. □

Man kan med en liknande metod visa att det konvexa höljet av fyra punkter som inte ligger på en linje ges av en polygon med som mest fyra hörn. På samma sätt kan man visa att det konvexa höljet av fem punkter som inte ligger på en linje är en polygon med som mest fem hörn. Man kan till och med visa följande sats, vars bevis kräver en del beräkningar och därför har lämnats till Appendix A.

Sats 3.2.4. Låt $n \geq 3$ och låt $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^2$ vara n stycken punkter som inte alla ligger på en linje. Då är $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ en polygon med som mest n stycken hörn.

Bevis. Se Sats A.1.2 □

Exempel 3.2.5. Betrakta följande tre exempel på konvexa höljen.



Notera att den högra figuren har en punkt $\mathbf{r}_3$ som ligger inuti det konvexa höljet. Det betyder att $\mathbf{r}_3$ ej behövs för att konstruera detta konvexa hölje, utan vi har att $\mathbf{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) = \mathbf{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6)$. Se även Övning 3.3. ▲

Anmärkning 3.2.6. Det följer från Sats 3.2.4 att varje polygon P är lika med det konvexa höljet av sina hörn. Det vill säga att om P har hörnen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ så är $P = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$. Från Sats 3.2.4 ser vi alltså att vi skulle kunnat definiera en polygon som det konvexa höljet av ett ändligt antal punkter som inte ligger på en linje. Vi valde att använda oss av Definition 2.1.1 eftersom den på många sätt är enklare att förstå. I resten av kompendiet kommer vi dock inte göra skillnad på en polygon enligt Definition 2.1.1 och en polygon som det konvexa höljet av sina hörn.

3.3 Euklidiska rummet och polyedrar

Än så länge har vi studerat tvådimensionella objekt, så som polygoner och andra delmängder i talplanet. Vi går nu över till att studera tredimensionella objekt. Följande definitioner är direkta motsvarigheter till det tvådimensionella fallet.

Definition 3.3.1. Det *euklidiska rummet* är mängden

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Givet $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ och $\lambda \in \mathbb{R}$ definierar vi

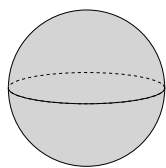
(i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$

(ii) $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3),$

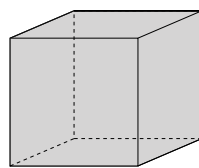
(iii) $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}.$

Vidare låter vi $\mathbb{Z}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$ beteckna *gittret* i $\mathbb{R}^3$. Vi inför notationen $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ och kallar denna punkt för *origo*.

Exempel 3.3.2. Följande är exempel på delmängder i $\mathbb{R}^3$.



Figur 3.4: En boll.



Figur 3.5: En kub.

Med en boll menar vi här mängden av alla punkter som har som mest avstånd r från någon given punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, där vi kallar $r > 0$ för bollens radie och $\mathbf{p}$ för bollens mittpunkt. En kub är det första exemplet vi ser på en tredimensionell månghörning vilket är något vi kommer spendera en stor del av detta kompendium att studera. ▲

Definition 3.3.3. Låt M vara en delmängd av $\mathbb{R}^3$.

- (i) En punkt $\mathbf{x} \in M$ kallas för en *inre punkt* om det existerar en boll B med $\mathbf{x}$ som mittpunkt som ligger helt inuti M , det vill säga att $B \subseteq M$. Mängden av alla inre punkter kallas för det *inre* av M .

- (ii) En punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ kallas för en *randpunkt* till M om varje boll B med $\mathbf{x}$ som mittpunkt har egenskapen att B innehåller både punkter som ligger i M och punkter som ligger utanför M , det vill säga att $B \cap M \neq \emptyset$ och $B \cap (\mathbb{R}^3 \setminus M) \neq \emptyset$. Mängden av alla randpunkter till M kallas för *randen* av M .

Definition 3.3.4. Låt $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ vara ett antal punkter i $\mathbb{R}^3$. Då definierar vi det konvexa höljet av dessa punkter som mängden

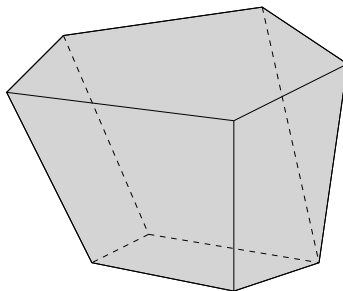
$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\}.$$

I analogi med Sats 3.2.4 gör vi följande definition.

Definition 3.3.5. En *polyeder* är ett konvext hölje av ett ändligt antal punkter $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^3$ med ett icke-tomt inre. Vi definierar *hörnen* av P som den minsta uppsättning punkter $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ så att $P = \mathbf{K}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$. Om alla hörn i P är gitterpunkter så kallas P för en *gitterpolyeder*.

Anmärkning 3.3.6. Den minsta uppsättningen av punkter som bygger upp en polyeder är unik. Det vill säga att om $P = \mathbf{K}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$ är en polyeder där k är minimal och om det finns k punkter $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ med $P = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ så gäller att $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$. Beviset för detta utelämnas och vi ber om läsarens overseende.

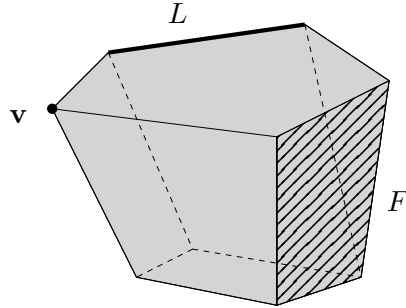
Exempel 3.3.7. Följande figur är en polyeder.



Notera att den är innesluten av flera polygoner som skär varandra i kanter och hörn. ▲

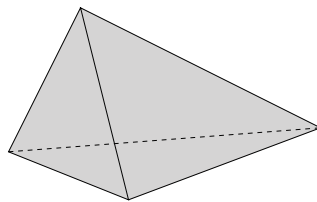
Definition 3.3.8. Låt P vara en polyeder. Randen av P består av ett antal polygoner som vi kallar för *fasetter* av P . Varje kant av någon fasett av P kallas också för en kant av P . Vidare sammanfaller hörnen av P med hörnen av fasetterna. Vi definierar *sida* som samlingsnamnet för tomma mängden, hörn, kanter och fasetter av en polyeder.

Exempel 3.3.9. Följande figur föreställer polyedern från Exempel 3.3.7, fast med en fasett F , en kant L och ett hörn $\mathbf{v}$ utmarkerat.



Anmärkning 3.3.10. Anledningen till att vi låter tomma mängden vara en sida är att vi vill kunna säga att två sidor av en polyeder skär varandra i en sida. I Exempel 3.3.9 är skärningen mellan till exempel sidorna F och L lika med den tomma mängden.

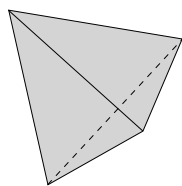
Exempel 3.3.11. En polyeder $T = \mathbf{K}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ som är det konvexa höljet av av precis fyra punkter i $\mathbb{R}^3$ kallas för en *tetraeder*.



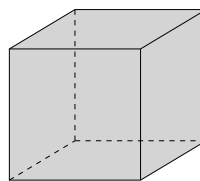
Notera att varje fasett av tetraeder är en triangel.



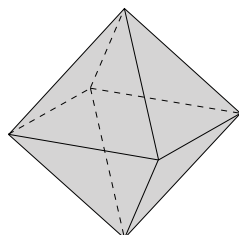
Exempel 3.3.12. En regelbunden polyeder är en polyeder vars fasetter är likformiga regelbundna polygoner. Det visar sig att, upp till val av skala, finns det bara fem regelbundna polyedrar och dessa kallas för de *platonska kropparna*. Vi illustrerar de fem platonska kropparna nedan.



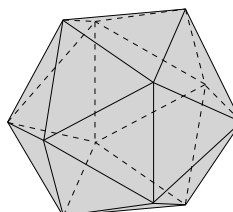
En regelbunden tetraeder.



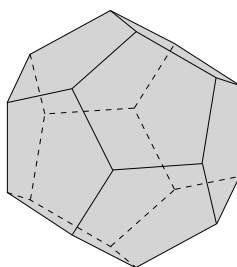
En kub (regelbunden hexaeder).



En regelbunden oktaeder.



En regelbunden ikosaeder.

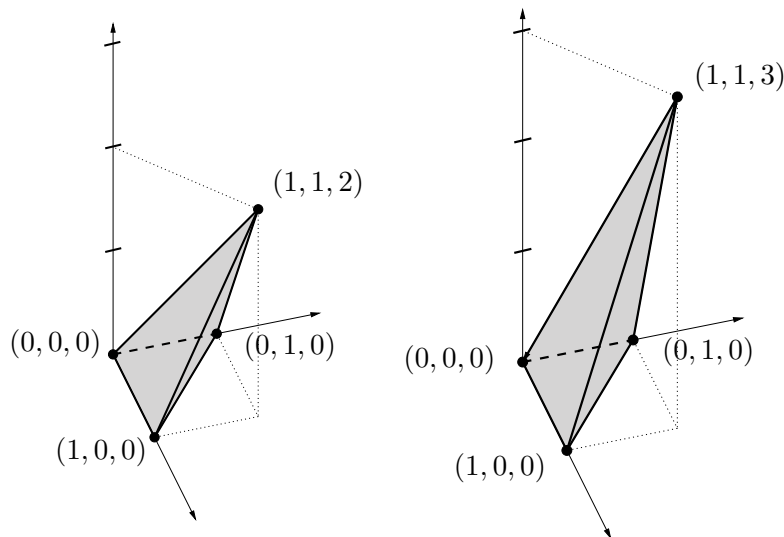


En regelbunden dodekaeder.



I Kapitel 2 så bevisade vi Picks sats som sa att arean av en gitterpolygon kan beräknas genom att räkna antalet gitterpunkter i polygonen. Då det motsvarande tredimensionella konceptet för en area är *volym* så är en naturlig fråga man kan ställa sig om det finns en liknande formel för att bestämma volymen av en gitterpolyeder genom att räkna antalet gitterpunkter i polyedern. Det finns dessvärre inte, som följande exempel illustrerar.

Exempel 3.3.13. Betrakta följande par av gitterpolyedrar i $\mathbb{R}^3$.



Det är tydligt att volymen av den högra är större än volymen av den vänstra. Picks sats sa att arean av en polygon gavs av formeln $i + \frac{r}{2} - 1$ där i är antalet inre gitterpunkter och r är antalet gitterpunkter på randen. Vi ser här att det *inte* kan finnas någon motsvarande formel för polyedrar och deras volymer eftersom polyedrarna ovan båda har sina fyra hörn som sina enda gitterpunkter men har olika volym. ▲

Detta är dock inte slutet på historien, som vi kommer se i Kapitel 6.

3.4 Högredimensionella rum och polytober

Om man jämför definitionerna för planet och rummet så ser man att den enda skillnaden är att man har en extra koordinat i tre dimensioner. På samma sätt är enda skillnaden mellan definitionen för en polygon och en polyeder att punkterna som man tar det konvexa höljet av har en extra koordinat. Rent matematiskt ser vi att objekt med högre dimension än tre inte är särskilt konstigt.

Definition 3.4.1. Låt d vara ett positivt heltal. Det *euklidiska d -rummet* är mängden

$$\mathbb{R}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}\}$$

och gitter ges av

$$\mathbb{Z}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{Z}\}.$$

Vi kallar d för *dimensionen* av $\mathbb{R}^d$. Slutligen skriver vi $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ med d stycken 0:or och kallar denna punkt för *origo*.

Definition 3.4.2. En *polytop* är samlingsnamnet för konvexa höljen av ändligt många punkter i $\mathbb{R}^d$ för $d = 1, 2, \dots$. En *gitterpolytop* är ett konvext hölje av ändligt många gitterpunkter i $\mathbb{R}^d$.

Exempel 3.4.3. Definitionen av en polytop fångar upp flera geometriska figurer som vi redan har stött på:

- (i) Ett linjesegment är det konvexa höljet av sina ändpunkter och är därför en endimensionell polytop.
- (ii) En polygon är det konvexa höljet av en mängd punkter som ligger i ett plan men inte längs en linje och är därför en tvådimensionell polytop.
- (iii) En polyeder är det konvexa höljet av mängd punkter som inte ligger i ett plan i $\mathbb{R}^3$ och är därför en tredimensionell polytop. ▲

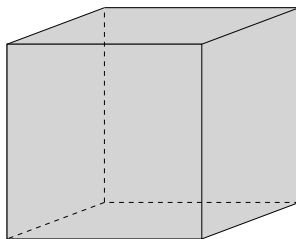
Att rita bilder av geometriska objekt som har en dimension som är större än tre är i princip omöjligt eftersom vi lever i ett tredimensionellt rum. Det finns dock tekniker som kan hjälpa en med hur man kan tänka på till exempel fyrdimensionella figurer. För att försöka föreställa oss motsvarigheten till en kub i fyra dimensioner börjar vi med ett linjesegment med sidlängd 1.



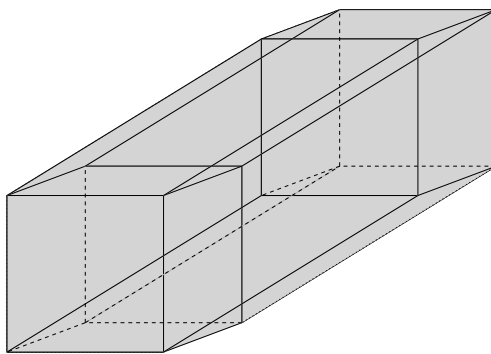
Om vi från varje punkt av linjesegmentet drar ett nytt linjesegment med samma längd som är vinkelrätt mot linjesegmentet vi startade med så får vi en kvadrat med sidlängd 1.



I varje punkt i kvadraten med sidlängd 1 lägger vi nu till ett linjesegment med samma längd som är vinkelrätt mot kvadraten. Vi erhåller då en kub med sidlängd 1.



Vi tänker oss nu att vi i varje punkt av kuben kan lägga till ett linjesegment som är vinkelrätt mot kuben och har längd 1. Detta är inte möjligt i dimension tre utan måste göras i $\mathbb{R}^4$. Den fyrdimensionella kropp som då uppstår är den fyrdimensionella kuben, som ibland också kallas för *tessarekten*. Om vi struntar i kravet att de linjesegmenten vi lägger till ska vara vinkelräta mot kuben så får vi följande bild.



Anmärkning 3.4.4. Ett faktum man kan visa med lite mer matematisk bakgrund är att precis som randen av en polyeder består av polygoner så kommer randen av en polytop av dimension d att utgöras av polytoper av dimension $d - 1$. Därför kan man definiera en regelbunden polytop av dimension d som en polytop vars rand består av likformiga och regelbundna polytoper av dimension $d - 1$. En sådan definition generaliserar direkt hur vi definierade regelbundna polygoner och polyedrar. Det är lätt att övertyga sig om att det finns oändligt många regelbundna polygoner och i Exempel 3.3.12 hävdade vi att det bara finns fem stycken regelbundna polyedrar upp till skala. Under 1800-talet lyckades matematiker kartlägga hur många regelbundna polytoper det finns upp till skala av godtycklig dimension d . I alla dimensioner större än fyra finns precis tre stycken regelbundna polytoper och dessa motsvarar generaliseringar av tetraedern, kubens respektive oktaedern. I dimension fyra finns det utöver den fyrdimensionella motsvarigheten till en tetraeder, kub och oktaeder ytterligare tre stycken regelbundna fyrdimensionella polytoper som kallas för 24-cellen, 120-cellen och 600-cellen. De något fantasilösa namnen för dessa fyrdimensionella polytoper refererar till hur många polyedrar som utgör deras rand. Randen av 24-cellen utgörs av 24 stycken oktaedrar, randen av 120-cellen utgörs av 120 stycken dodekaedrar och randen av 600-cellen utgörs av 600 stycken tetraedrar.

Övningar

Övning 3.1 (★). Lös följande.

- (i) Beräkna $(4, 2) + 2(1, 1)$ och rita ut lösningen geometriskt.
- (ii) Beräkna $(1, 1, 1) - 3(2, 0, 1) + 4(0, 0, 1)$.

Övning 3.2 (★). Vad är det konvexa höljet av en punkt?

Övning 3.3 (★★). Visa att om $\mathbf{x} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ så är

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}).$$

Övning 3.4 (★★★). Följande uppgifter har alla att göra med konvexa höljen och linjesegment.

- (i) Visa att det konvexa höljet av tre punkter som ligger på en linje är lika med det konvexa höljet av de två yttersta punkterna.

- (ii) Visa att det konvexa höljet av k stycken punkter som ligger på en linje är lika med det konvexa höljet av de två yttersta.
- (iii) Visa att om ingen av k stycken punkter $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ ligger i det konvexa höljet av de övriga $k - 1$ punkterna så ligger ingen trippel av punkter på en linje.

Övning 3.5 (★★). Visa att konvexa höljet av $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ kan skrivas som $0 \leq y \leq x \leq 1$. Rita upp området.

Övning 3.6 (★★). Visa att konvexa höljet av $(-1, -1, 0), (-1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)$ kan skrivas $|x| + z \leq 1$ och $|y| + z \leq 1$. Rita upp området.

Övning 3.7 (★★). Visa $\mathbf{K}((0, 0), (1, 0), (1, 1), (1/2, 1/2)) = \mathbf{K}((0, 0), (1, 0), (1, 1))$.

Övning 3.8 (★★). Kan man skriva linjen $\{y = 0\} \in \mathbb{R}^2$ som ett konvext hölje av ett ändligt antal punkter?

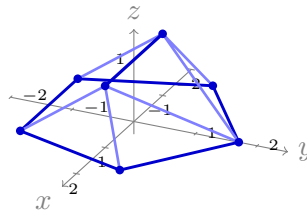
Övning 3.9 (★★). Visa att ett konvext hölje av ett ändligt antal punkter är en konvex mängd.

Övning 3.10 (★★★). Låt P vara en polyeder. Dualen till P är det konvexa höljet av mittpunkterna av fasetterna i P . Vad är dualen till kuben?

Övning 3.11 (★★). Följande övning handlar om sidor hos polyedrar.

- (i) Konstruera en polyeder vars fasetter utgörs av tre trapetser (fyrhörningar) och två trianglar.
- (ii) En sida av en polyeder P är en pentagon (femhörning). Hur många fasetter kan P som minst ha?

Övning 3.12 (★). Markera ut hörn, kanter och fasetter. Vilka polygoner består av fasetterna av? Ge exempel på två kanter som skär varandra i en punkt, tomma och två fasetter som skär varandra i en sida.



Övning 3.13 (★★). Antag att $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^3$ bildar en tvådimensionell n -gon P och x_{n+1} ej ligger i planet bildat av P . Låt Q vara polytopen bildat av $x_1, \dots, x_{n+1}$. Vilka fasetter har Q ?

Övning 3.14 (★). Låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ och $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi definierar följande algebraiska struktur på $\mathbb{R}^d$:

- (i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d)$,
- (ii) $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_d)$.

Beräkna summorna $(1, 0, 0, 1) + (0, 1, 1, 0)$ och $(1, 2, 3, 4) + 3(1, 1, 0, 1)$.

Övning 3.15 (★★). Motsvarigheten till en tetraeder i fyra dimensioner kallas för ett 4-simplex. Ett exempel på ett 4-simplex är polytopen

$$P = \mathbf{K} \left((0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \right).$$

Visa att P har precis fem gitterpunkter.

Övning 3.16 (★). Låt P vara en gitterpolytop och låt $n \in \mathbb{N}$. Visa att nP är en gitterpolytop.

4 Kombinatorik och polynom

Frågor av typen ”På hur många sätt kan man välja ut 5 stycken bollar bland 30 stycken bollar av olika färg?” eller ”Hur många uppsättningar av k stycken positiva heltal har samma summa?” brukar inrymmas inom den gren av matematiken som kallas kombinatorik. I det här kapitlet är vi intresserade av verktyg från kombinatoriken som kan hjälpa oss med att räkna gitterpunkter i polytober. Vi kommer även att ge en introduktion till polynomfunktioner som också kommer att visa sig vara mycket användbara för att räkna gitterpunkter i polytober i dimension ≥ 3 där Pick’s sats inte längre gäller.

4.1 Grundläggande kombinatorik

Inom kombinatorik är man ofta intresserad av att räkna antalet sätt utföra något på. För att förenkla framställningen inleder vi med ett konkret exempel.

Exempel 4.1.1. Vi ställer oss följande fråga.

Om fem matematiker i tur och ordning väljer en av fem kriter i färgerna vit, röd, grön, blå och gul, på hur många sätt kan de fem kriter av olika färg fördelas?

För att besvara frågan noterar vi att den första matematikern har fem möjliga färger att välja mellan. Efter att den första matematikern gjort sitt val kommer den andra matematikern att ha fyra färger att välja mellan. Därefter kommer den tredje matematikern att ha tre färger att välja mellan och så vidare. Alltså finns det

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

olika sätt som färgkritorna kan fördelas mellan matematikerna. ▲

Motiverade av exemplet gör vi följande definition.

Definition 4.1.2. Låt $n \in \mathbb{N}$. Vi definierar talet $n!$ som antalet sätt att ordna n stycken objekt via

$$n! = \begin{cases} n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1, & \text{om } n > 0, \\ 1, & \text{om } n = 0. \end{cases}$$

Vi uttalar $n!$ som *n fakultet*.

Exempel 4.1.3. I en vanlig kortlek finns det 13 stycken klöver. Om vi blandar enbart de 13 klöverkort i en kortlek så är resultatet matematiskt samma sak som att lägga 13 kort i någon ordning. Därför finns det $13!$ olika sätt som de 13 klöverkort kan ha ordnats efter att ha blandats. Miniräknaren ger att $13! \approx 6 \cdot 10^9$ och för att få en känsla av hur stort detta tal är så kan vi jämföra med antalet människor som lever på jorden vilket i skrivande stund är ungefär $7 \cdot 10^9$. ▲

En annan typ av frågeställningar som dyker upp i kombinatorik ges i följande exempel.

Exempel 4.1.4. Vi ställer oss frågan:

På hur många sätt kan man bland en vit, en röd, en grön, en blå och en gul krita välja ut tre stycken kriter, utan att ta hänsyn till den ordning man gör valen?

Att inte ta hänsyn till ordning betyder till exempel att valet *blå, grön, röd* ska ses som samma val som valet *grön, blå, röd*. Vi börjar med att räkna antalet sätt att välja ut tre färger *med* hänsyn till ordning. För att göra detta konstaterar vi först att det finns fem stycken val för första kriter. Därefter finns fyra stycken val för andra kriter och tre stycken val för tredje kriter. Sammanlagt finns alltså $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ stycken val om vi tar hänsyn till ordning. Om vi istället vill beräkna antalet val oberoende av ordning behöver vi dividera med antalet sätt att ordna de tre kriter vi valt, det vill säga $3! = 6$. Sammanfattningsvis finns det alltså

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

stycken sätt att välja ut 3 av 5 kriter utan hänsyn till ordning. ▲

Precis som tidigare gör vi en definition motiverade av exemplet.

Definition 4.1.5. Låt $n, k \in \mathbb{N}$ där $n \geq k$. Vi definierar talet $\binom{n}{k}$ som antalet sätt att bland n stycken föremål välja ut k stycken föremål utan hänsyn till ordning via

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Vi uttalar $\binom{n}{k}$ som *n välj k* (eller *n över k*). Vi definierar även $\binom{n}{k} = 0$ om $n < k$ eftersom det inte går att välja ut fler element än vad man har element att välja på.

Exempel 4.1.6. Att välja ut ett kort från de 52 korten i en vanlig kortlek går att göra på precis 52 olika sätt. Väljer man istället ut 2 kort kan man få

$$\binom{52}{2} = \frac{52!}{2!(52-2)!} = \frac{52!}{2!50!} = \frac{52 \cdot 51}{2} = 26 \cdot 51 = 1361$$

olika par av kort. ▲

Låt oss nu betrakta problemet med att räkna antal sätt som man kan placera n stycken likadana bollar i d stycken olika lådor.

Exempel 4.1.7. På hur många sätt kan man placera tre bollar (•) i två olika lådor? För att svara på den frågan noterar vi först att två lådor kan ses som en stor låda i vilken vi placerat ut en skiljevägg. Om vi har en stor låda med tre bollar kan vi alltså skapa två lådor med sammanlagt tre bollar genom att lägga in en skiljevägg någonstans mellan bollarna. Alla möjligheter för skiljeväggens placering illustreras nedan:

| • • • | | | • • | • | | • | • • | | | • • • |

Här har vi till exempel att $\underline{\bullet} \bullet \bullet \underline{\bullet}$ svarar mot att placera alla tre bollar i första lådan och inga i den andra, och att $\underline{\bullet} \bullet \underline{\bullet} \bullet$ svarar mot att placera två bollar i den första lådan och en boll i den andra.

Metoden vi använde här kan göras mer strukturerad genom att tänka att vi har $3 + 1 = 4$ stycken platser att placera ut 1 skiljevägg på, vilket kan göras på $\binom{4}{1} = 4$ sätt. Sedan fyller vi helt enkelt de resterande 3 platserna med de 3 bollarna vilket inte påverkar antalet möjligheter. $\blacktriangle$

Exempel 4.1.8. På hur många sätt kan man placera ut fyra bollar i tre olika lådor? Genom att använda samma metod som i Exempel 4.1.7 kan vi tänka oss att vi har $3 - 1 = 2$ skiljeväggar att placera ut bland $4 + 2 = 6$ stycken platser. Till exempel kan vi placera ut skiljeväggarna så här: $\underline{\bullet} \underline{\bullet} \underline{\bullet} \underline{\bullet}$. Efter att ha fyllt de resterande platserna med bollar ser vi att detta ger en boll i den första lådan, två i den andra och en i den sista lådan: $\underline{\bullet} \bullet \bullet \underline{\bullet} \bullet$. Antal sätt att placera ut dessa två skiljeväggar bland de sex möjliga platserna ges av $\binom{6}{2} = 15$, så det finns 15 stycken sätt att placera 4 bollar i 3 lådor. $\blacktriangle$

Sats 4.1.9. Antalet sätt att placera n bollar i d olika lådor är $\binom{d-1+n}{d-1}$.

Bevis. Vi använder samma konstruktion som i Exempel 4.1.7 och 4.1.8. Då har vi $d - 1$ stycken skiljeväggar att placera ut bland $d - 1 + n$ stycken platser. Detta kan göras på precis $\binom{d-1+n}{d-1}$ stycken sätt. $\square$

Sats 4.1.10. Antalet sätt att placera som mest n stycken bollar i d stycken olika lådor ges av $\binom{d+n}{d}$.

Bevis. Eftersom man kan lägga de bollar som inte placeras i någon av de d lådorna i en komplementlåda så kan man omformulera problemet till att placera n stycken bollar i $d + 1$ stycken lådor. Detta kan enligt Sats 4.1.9 göras på $\binom{(d+1)-1+n}{(d+1)-1} = \binom{d+n}{d}$ stycken sätt. $\square$

4.2 Polynom

Det finns få begrepp inom matematiken som intresserar så många från så många olika områden som ordet *polynom*. Dessa funktioner spelar en central roll inom algebra, analys, kombinatorik, och till och med mer tillämpade områden som fysik eller datavetenskap. Vi kommer att stöta på en hel del polynom i detta kompendium och även så kallade genererade funktioner som kan ses som en slags "oändliga" polynom. Vi går igenom några grundläggande resultat angående polynom som kommer att vara bra att känna till i senare avsnitt.

Definition 4.2.1. Ett (reellt) polynom av grad d är en funktion på formen

$$f(t) = a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

där $a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$.

Det är lätt att se att både summan och produkten av två polynom åter igen blir ett polynom. Dessutom gäller även följande.

Hjälpsats 4.2.2. Om $f(t)$ är ett polynom av grad n och $g(t)$ är ett polynom av grad m så är $h(t) = f(g(t))$ ett polynom av grad $n \cdot m$.

Bevis. Eftersom att $f(t)$ kan skrivas som en summa $f(t) = a_n t^d + \dots + a_1 t + a_0$ får vi att

$$h(t) = a_n(g(t))^n + \dots + a_1 g(t) + a_0.$$

Eftersom att produkten av två polynom är ett polynom och “upphöjt till n ” bara betyder “ta produkten med sig själv n gånger” får vi att alla termer $a_n(g(t))^n, a_{n-1}(g(t))^{n-1} \dots$ var för sig är polynom. Slutligen så är en summa av polynom fortfarande ett polynom så det följer att $h(t)$ är ett polynom. $\square$

Polynom studeras ofta med hjälp av deras nollställen eller rötter. Det visar sig att över de komplexa talen har alla (icke konstanta) polynom minst ett nollställe och man kan dessutom *faktorisera* varje komplext polynom (av grad n) på följande vis

$$f(t) = c \cdot (t - r_1)(t - r_2) \dots (t - r_n)$$

där $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ är polynometets nollställen (samma nollställe kan förekomma flera gånger) och $c \in \mathbb{C}$ är en nollskild konstant. Att bevisa detta kräver avancerade metoder men vi kan gå igenom några enklare delresultat.

Hjälpsats 4.2.3. Låt $f(t)$ vara ett polynom och låt r vara en konstant. Då är $f(r) = 0$ om och endast om det finns ett annat polynom $g(t)$ sådant att

$$f(t) = (t - r)g(t).$$

Bevis. Om vi antar att $f(t) = (t - r)g(t)$ så är

$$f(r) = (r - r)g(r) = 0 \cdot g(r) = 0.$$

Å andra sidan, om $f(r) = 0$ låt $h(t) = f(t + r)$. Det följer från Hjälpsats 4.2.2 att $h(t)$ är ett polynom. Vi får att $h(0) = f(r) = 0$. Men om

$$h(t) = a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

så är

$$0 = h(0) = a_d \cdot 0^d + a_{d-1} \cdot 0^{d-1} + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0.$$

Alltså är $a_0 = 0$ och det följer att $h(t) = t \cdot p(t)$ där

$$p(t) = a_d t^{d-1} + a_{d-1} t^{d-2} + \dots + a_1.$$

Eftersom att $h(t) = f(t + r)$ är

$$f(t) = h(t - r) = (t - r) \cdot p(t - r) = (t - r)g(t)$$

där $g(t) = p(t - r)$. $\square$

Sats 4.2.4. Om $f(t)$ och $g(t)$ är två polynom av grad d sådana att $f(r_i) = g(r_i)$ i $d + 1$ stycken olika punkter $r_1, \dots, r_{d+1}$ så är $f = g$.

Bevis. Låt $h(t) = f(t) - g(t)$. Då är h ett polynom med som högst grad d och om $f(r) = g(r)$ för något värde r så är $h(r) = 0$. Därmed ger Hjälpssats 4.2.3 att

$$h(t) = (t - a_1) \cdot (t - a_2) \cdots (t - a_{d+1}) \cdot p(t)$$

där $p(t)$ också är ett polynom. Men

$$(t - a_1) \cdot (t - a_2) \cdots (t - a_{d+1}) = t^{d+1} + \dots$$

är ett grad $d + 1$ polynom medan $h(t)$ har högst grad d så detta är endast möjligt om $p(t) = 0$. Därmed är $h(t) = 0$ så $f(t) = g(t)$. $\square$

Låt oss slutligen säga några ord om så kallade heltalsvärda polynom eftersom att dessa kommer att spela en central roll i den här kursen.

Definition 4.2.5. Ett heltalsvärt polynom är ett polynom $f(t)$ sådant att $f(n)$ är ett heltal för alla positiva heltal $n \geq 0$.

Vi kommer ofta att skriva $f(n)$ istället för $f(t)$ när vi pratar om heltalsvärda polynom. Det är dock viktigt att ha koll på att vi kan stoppa in vilket tal som helst, alltså inte bara heltal, i polynomet ändå. Det är uppenbart att om

$$f(n) = a_d n^d + \dots + a_1 n + a_0$$

är ett polynom där alla koefficienter $a_0, \dots, a_d$ är heltal så är f heltalsvärt. Det visar sig dock att det finns heltalsvärda polynom vars koefficienter *inte* är heltal.

Exempel 4.2.6. Låt $f(n)$ vara polynomet grad k polynomet

$$f(t) = \frac{n(n-1) \dots (n-(k-1))}{k!}.$$

Vi såg i Kapitel 4.1 att antalet sätt att välja k föremål från en hög av n utan hänsyn till ordning är

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-(k-1))}{k!} = f(n).$$

Detta är per definition ett heltal för alla heltal $n \geq 0$ så $f(n)$ är heltalsvärt. Den ledande termen för detta polynom är dock $\frac{1}{k!}n^k$ vilket inte är ett heltal (om $k \geq 2$). Notera att om $0 \leq n < k$ kan vi inte välja k stycken föremål från en hög med n föremål så därmed är $f(n) = 0$ i det fallet. Att $0, 1, \dots, k-1$ är nollställena till $f(n)$ är också enkelt att läsa av direkt från vårt uttryck för $f(n)$. Framöver kommer vi att skriva $\binom{n}{k}$ för att beteckna detta polynom även när n inte är ett positivt heltal. $\blacktriangle$

Sats 4.2.7. Om $f(n)$ är ett grad d polynom finns det unika reella tal $b_0, \dots, b_d$ sådana att

$$f(n) = b_0 \binom{d+n}{d} + b_1 \binom{d-1+n}{d} + \dots + b_{d-1} \binom{1+n}{d} + b_d \binom{n}{d}.$$

Dessutom gäller att $f(n)$ är heltalsvärt om och endast om $b_0, \dots, b_d$ är heltal.

Bevis. Vi kommer att bestämma värdena $b_0, b_1, \dots$ ett i taget. Det vill säga, vi börjar med att bestämma b_0 , och när vi har gjort det bestämmer vi b_1 och så vidare. Vi kallar högerledet för

$$g(n) = \sum_{k=0}^d b_k \binom{d-k+n}{d}.$$

Om $0 \leq m < d$ så gäller att $\binom{m}{d} = 0$. Notera först att $\binom{d-k+0}{d} = 0$ om $k > 0$. Därmed är

$$\sum_{k=0}^d b_k \binom{d-k+0}{d} = b_0 \binom{d}{d} = b_0.$$

Således har vi att $f(0) = g(0)$ om och endast om $b_0 = f(0)$. Om $f(0)$ är ett heltal är alltså också b_0 ett heltal.

Om $k > 1$ är $\binom{d-k+1}{d} = 0$ så $f(1) = g(1)$ ger

$$f(1) = g(1) = b_0 \binom{d+1}{d} + b_1 \binom{d-1+1}{d} + 0.$$

Vi har således att $f(1) = g(1)$ om och endast om

$$b_1 = f(1) - \binom{d+1}{d} b_0 = f(1) - (d+1)b_0.$$

Eftersom att vi redan har beräknat b_0 får vi att det finns unika värden på b_0 och b_1 sådana att $f(0) = g(0)$ och $f(1) = g(1)$. Dessutom ger ekvationen att om $f(1)$ och b_0 är heltal så är även b_1 det.

Om vi fortsätter med samma argument får vi att för varje $0 \leq k \leq d$ kan vi först bestämma värdena på $b_0, \dots, b_{k-1}$ som gör att $f(0) = g(0), f(1) = g(1), \dots, f(k-1) = g(k-1)$. Därefter gäller att $f(k) = g(k)$ om och endast om

$$b_k = f(k) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{d-j+k}{d} b_j.$$

Dessutom är högerledet i uttrycket ett heltal om och endast om $f(k)$ är ett heltal (förutsatt att alla tidigare $b_0, \dots, b_{k-1}$ är det).

I slutändan har vi alltså visat att det finns unika värden $b_0, b_1, \dots, b_d$ sådana att $f(k) = g(k)$ för alla $0 \leq k \leq d$ och dessa värden är heltal om alla $f(k)$ är det. Eftersom att f och g är grad d polynom som är lika i $d+1$ punkter ger Sats 4.2.4 att $f(t) = g(t)$. $\square$

4.3 Approximera funktioner med polynom

Polynom är på många sätt de "enklaste" funktionerna som finns. En anledning till det är att de är mycket lätta att evaluera. Till exempel om vi har att $f(x) = x^3 - 3x + 5$ så är det enkelt att beräkna

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 5 = 8 - 6 + 5 = 7.$$

För andra funktioner kan det däremot vara betydligt svårare att beräkna exakt vad de ger för ett visst värde. Exempelvis är det knappast självklart hur man ska göra för att räkna ut $\sin(2)$ eller $\ln(2)$ upp till tre decimaler utan att använda miniräknare. En vanlig lösning på detta problem är att försöka approximera mer komplicerade funktioner med hjälp av polynom av någon viss grad. Det vill säga hitta ett polynom $p(x)$ av grad lägre än eller lika med något visst maximum d så att

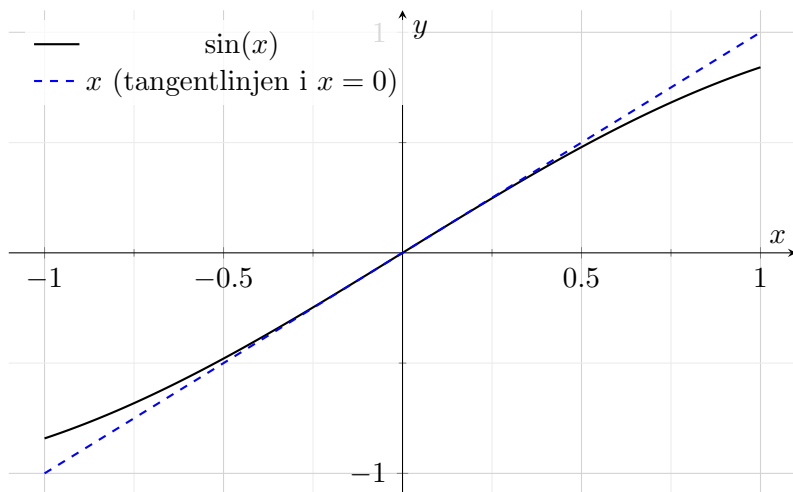
$$f(x) \approx p(x).$$

Ibland kan man skapa sådana polynom som ger bra approximationer för alla värden på x och men oftast får man nöja sig med att approximationen fungerar för små värden på x . Därför är målet med polynomapproximationer att hitta det polynom

$$p(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

av grad $\leq d$ som "bäst approximerar" $f(x)$ för små värden på x . Exakt vad "bäst approximerar" och "små värden" innebär här kommer vi inte att gå in på i detalj utan vi ska istället illustrera idén med några exempel.

Exempel 4.3.1. Bäst approximerande polynom av grad 1 är faktiskt något som ni redan är bekanta med. Ett grad 1 polynom är samma sak som en rät linje och för en funktion $f(x)$ är den bäst approximerande linjen för små värden på x tangentlinjen för f i punkten $x = 0$. I figuren nedan ser vi att tangentlinjen ger en ganska bra approximation $\sin(x) \approx x$ om x är tillräckligt litet.



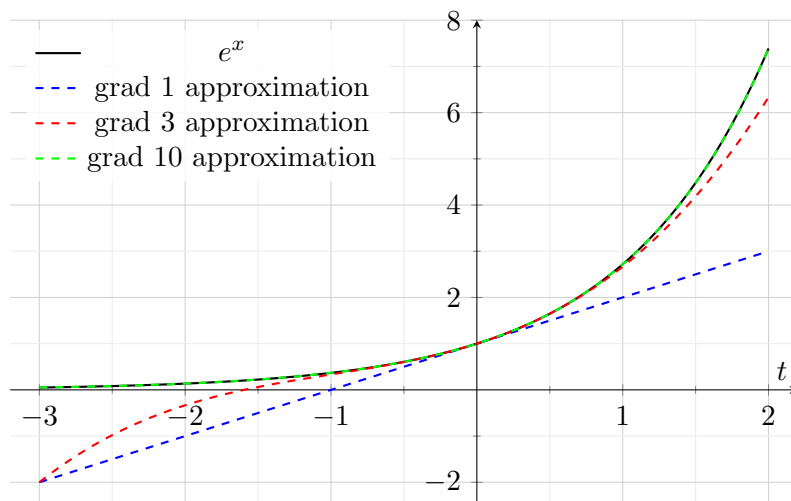
▲

I allmänhet kan man visa att för den bästa polynomapproximationen $f(x) \approx p(x)$ med ett polynom av grad d gäller att $f(0) = p(0)$, $f'(0) = p'(0)$, $f''(0) = p''(0)$ och så vidare upp till den d :te derivatan $f^{(d)}(0) = p^{(d)}(0)$ och med hjälp av detta kan vi beräkna polynomets koefficienter.

Exempel 4.3.2. Det bäst approximerande grad d polynomet för e^x är

$$p_d(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^d}{d!}.$$

I figuren nedan plottar vi dessa i grad 1, 3, och 10 för att jämföra med e^x . Notera att för grad 10 är approximationen så bra att vi inte ens kan se någon skillnad mellan graferna i det angivna intervallet.



Detta exempel visar en vanligt förekommande effekt:

Ju fler termer vi lägger på desto bättre blir polynomapproximationen.

Om vi använder **oändligt** många termer blir approximationen i det här fallet perfekt, det vill säga en likhet, för alla värden på x . Alltså gäller det att

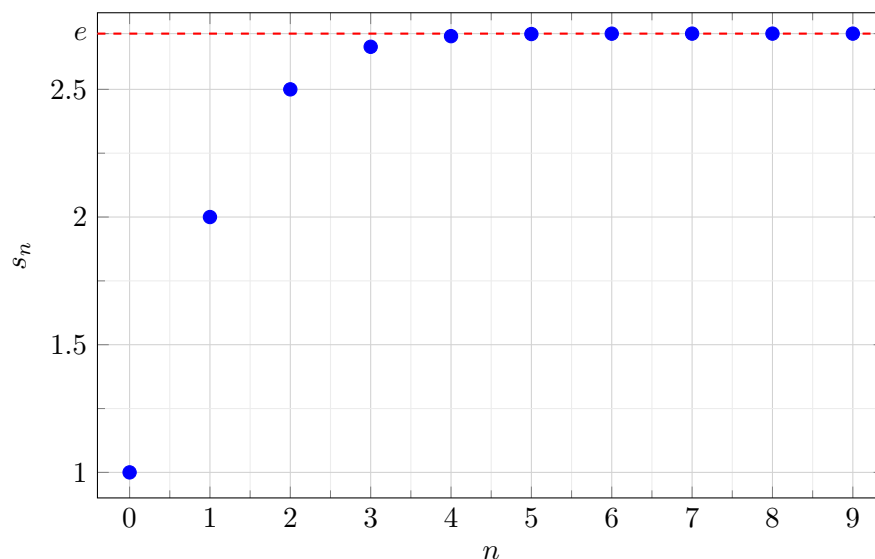
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

där ... ska tolkas som "fortsätt lägga på termer i all oändlighet", för alla tal $x \in \mathbb{R}$. Vi kallar ett sådant "oändligt polynom" för en serieutveckling.

Här ringer säkert en del varningsklockor hos många av er eftersom att vi nyss har tagit en summa av oändligt många termer. I detta fall är det dock inga problem. För att avgöra vilket tal den oändliga summan

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

motsvarar beräknar vi först summan av de första två termerna, sen de första tre, sen de första fyra, och så vidare. Om vi kallar delsumman av de första n stycken termerna för s_n ser vi att talen $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ rör sig närmare och närmare ett visst värde när n går mot oändligheten. Vi illustrerar detta i figuren nedan.



Värdet de närmar sig är värdet på den oändliga summan. I allmänhet gäller att för en oändlig talföljd $a_1, a_2, a_3, \dots$ ges den oändliga summan, eller *serien* som det också kallas

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

av det värde som delsummorna

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

närmar sig när n går mot oändligheten. Man måste dock vara försiktig när det kommer till oändliga summor då det inte finns några garantier att delsummorna närmar sig något visst tal så som de gjorde i vårt exempel. Exempelvis så kommer delsummorna inte att närma sig någonting, utan istället växa mot oändligheten, om vi skulle försöka beräkna den oändliga summan

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

Om delsummorna närmar sig något värde säger vi att summan *konvergerar*. I exemplet ovan behövde vi inte tänka så mycket på konvergens då summan

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

konvergerar för alla värden på x . Så är dock inte alltid fallet som det viktiga exemplet nedan illustrerar.

Exempel 4.3.3. Låt $f(x)$ vara funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Vi hävdar att den bästa grad d approximationen till $f(x)$ är

$$p_d(x) = 1 + x^2 + x^3 + \dots + x^d = \sum_{n=0}^d x^n.$$

För att motivera detta noterar vi först att

$$\begin{aligned}
 (1-x)p_d(x) &= \\
 &= \left(1+x+x^2+\cdots+x^{d-1}+x^d\right) - x\left(1+x+x^2+\cdots+x^{d-1}+x^d\right) \\
 &= \left(1+x+x^2+\cdots+x^{d-1}+x^d\right) - \left(x+x^2+x^3+\cdots+x^d+x^{d+1}\right) \\
 &= 1-x^{d+1}.
 \end{aligned}$$

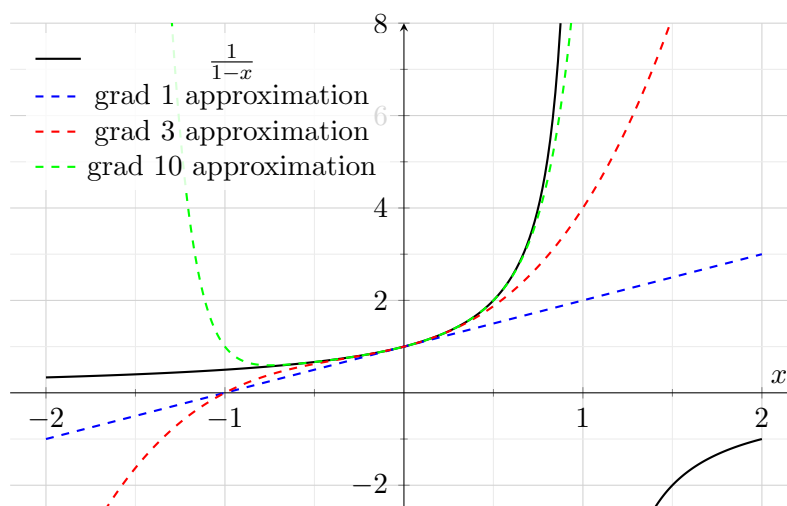
Genom att flytta runt termerna lite får vi att

$$1 - (1-x)p_d(x) = x^{d+1}$$

så om vi delar båda sidor med $(1-x)$ får vi

$$\frac{1}{1-x} - p_d(x) = \frac{1}{1-x} \cdot x^{d+1}.$$

Om x är tillräckligt litet är x^{d+1} mycket nära 0 och för alla x i intervallet $-1 < x < 1$ gäller att ju större d är desto mindre blir skillnaden mellan polynomapproximationen och det sanna värdet. Å andra sidan, om $|x| > 1$ så blir $|x^{d+1}|$ större ju högre d är och därmed blir polynomapproximationen sämre ju fler termer vi lägger på. Vi illustrerar detta i figuren nedan:



▲

Exemplet ovan illustrerar en annan vanligt förekommande effekt. Tillräckligt nära 0 (på intervallet $-1 < x < 1$) blir approximationen bättre och bättre ju fler termer vi lägger till men för alla x utanför detta intervall blir den tvärt om sämre och sämre. Om vi lägger på oändligt många termer får vi att $1+x+x^2+\dots$ konvergerar serien, och

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots, \quad (4.1)$$

precis när $-1 < x < 1$. Om x ligger utanför detta intervall konvergerar däremot inte serien. Således kan vi egentligen inte säga att vi har en likhet av funktioner

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

då sambandet bara gäller om x är tillräckligt nära 0. Denna typ av beteende är vanligt förekommande för serier och är en av anledningarna till att vi i nästa kapitel inte kommer att tänka på sådana här serier som riktiga funktioner som vi kan stoppa in värden i utan som mer abstrakta matematiska objekt.

Övningar

Övning 4.1 (★). Vilket tal är störst: $4!$ eller $\binom{6}{3}$?

Övning 4.2 (★). På hur många sätt kan hörnen i en hexagon (sexhörning) numreras från ett till sex?

Övning 4.3 (★). På hur många sätt kan man från mängden $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ välja ut 3 stycken olika siffror?

Övning 4.4 (★★). I luffarschack består spelplanen av 9 rutor. Spelet går ut på att två spelare turas om att lägga ut sina pjäser på brädet med motivationen att få tre av sina pjäser i en rad. Pjäserna för den spelare som börjar är kors medan den andra spelarens pjäser är ringar. *På hur många sätt kan spelarna lägga ut alla sina pjäser på brädet om spelet inte avbryts för att någon vinner?*

Övning 4.5 (★★). Visa att

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Övning 4.6 (★★). (i) Visa att för varje positivt heltal n har ekvationen

$$x_1 + x_2 = n$$

$n + 1$ stycken olika lösningar där $x_1, x_2 \geq 0$ är positiva heltal.

(ii) Visa att ekvationen

$$x_1 + x_2 + \dots + x_d = n$$

har

$$\binom{d-1+n}{d-1}$$

stycken positiva heltalslösningar.

Ledning: Visa att antalet heltalslösningar till ekvationen är lika med antalet sätt att stoppa n bollar i d lådor.

Övning 4.7 (★★). I denna övning ska vi ge ett exempel på hur den kombinatorik vi har lärt oss kan användas för att räkna gitterpunkter i polyedrar. Låt T beteckna tetraedern

$$T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (n, 0, 0), (0, n, 0), (0, 0, n))$$

där n är något positivt heltal. Per definition innebär det alltså att T består av punkter på formen

$$\lambda_1(0, 0, 0) + \lambda_2(n, 0, 0) + \lambda_3(0, n, 0) + \lambda_4(0, 0, n) = (n\lambda_2, n\lambda_3, n\lambda_4)$$

så att $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ och $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$. Med variabelbytet $x_i = n\lambda_i$ kan vi skriva om det till att T består av punkter på formen

$$x_1(0, 0, 0) + x_2(1, 0, 0) + x_3(0, 1, 0) + x_4(0, 0, 1) = (x_2, x_3, x_4)$$

så att $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ och $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$.

(i) Visa att en punkt

$$p = x_1(0, 0, 0) + x_2(1, 0, 0) + x_3(0, 1, 0) + x_4(0, 0, 1)$$

i T är en gitterpunkt om och endast om x_1, x_2, x_3, x_4 alla är heltal.

(ii) Använd del (i) för att förklara varför antalet gitterpunkter i T är lika med antalet positiva heltalslösningar till ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n.$$

(iii) Använd resultatet i Uppgift 4.6 för att beräkna antalet gitterpunkter i T .

Övning 4.8 (★★). Kvadreringsregeln säger att

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Kvadreringsregeln är ett specialfall av *binomialsatsen* som säger att

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

(i) Använd binomialsatsen för att visa kubregeln

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

(ii) Använd binomialsatsen för att visa att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

(iii) Bevisa binomialsatsen. (*Ledning:* Om man utvecklar $(a + b)^n$ så kommer man få en summa på formen $\sum_{k=0}^n c_k a^{n-k} b^k$. Varför? På hur många sätt kan man välja ut k stycken b från de n stycken parenteserna $(a + b)^n$?)

Övning 4.9 (★★). Binomialsatsen illustreras ofta genom *Pascals triangel* där talen i den $(n + 1)$:ta raden är koefficienterna som dyker upp i $(a + b)^n$. Nedan illustreras de 6 första raderna i Pascals triangel.

$$\begin{array}{cccccccc}
& & & & 1 & & & \\
& & & & & 1 & & 1 \\
& & & 1 & & 2 & & 1 \\
& & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
& 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
& \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots
\end{array}$$

Konstruktionen av Pascals triangel baseras på likheten

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (4.2)$$

(i) Förklara vad likheten (4.2) säger om hur rad n i Pascals triangel kan skapas givet rad $n-1$.

(ii) Bevisa likheten (4.2).

Övning 4.10 (★★). (i) Beräkna produkten av polynomen $t^3 - 6t^2 + 2$ och $3t^2 - 1$.

(ii) Visa att två godtyckliga polynom

$$f(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i, \quad g(t) = \sum_{j=0}^m b_j t^j$$

har produkten

$$f(t) \cdot g(t) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k t^k$$

där

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

Här använder vi notationen att $b_j = 0$ om $j > m$

Övning 4.11 (★★). (i) Visa att om $f(t)$ är ett polynom av grad 2 så är $g(t) = f(t+1) - f(t)$ ett polynom av grad 1.

(ii) Visa att om $f(t)$ är ett polynom av grad d så är $g(t) = f(t+1) - f(t)$ ett polynom av grad $\leq d-1$.

Övning 4.12 (★★). Använd Sats 4.2.7 för att visa att om

$$f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0$$

är heltalsvärt så är alla koefficienter heltalsmultiplar av $\frac{1}{d!}$.

Övning 4.13 (★★). Om vi betraktar

$$\binom{n}{d} = \frac{n(n-1)\dots(n-d+1)}{d!}$$

som ett polynom av grad d kan vi stoppa in alla reella tal i uttrycket, inte bara positiva heltal. Visa att med denna tolkning av $\binom{n}{d}$ gäller

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Övning 4.14 (★★★). Låt $f(n)$ vara ett polynom av grad d skrivet på formen

$$f(n) = \sum_{i=0}^d b_i \binom{d-i+n}{d}.$$

Visa att:

(i) $f(-1) = (-1)^d b_d$

(ii) Om $f(-1) = 0$ så kan grad $d-1$ polynomet $f(n) - f(n-1)$ skrivas på formen

$$f(n) - f(n-1) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i \binom{(d-1)-i+n}{d-1}$$

Övning 4.15 (★). Betrakta den serien

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Beräkna de första 5 delsummorna och jämför med $e \approx 2.718282$. Hur många termer behöver du ta med innan approximationen gäller upp till 4 decimaler?

Övning 4.16 (★★). I denna uppgift ska vi använda serieutvecklingen

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

för $|x| < 1$ att härleda serieutvecklingar för några andra funktioner på samma intervall.

(i) Använd det faktum att om $f(x) = \frac{1}{1-x}$ så är $\frac{1}{1+x} = f(-x)$ för att visa att

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

för $|x| < 1$.

(ii) Använd kedjeregeln för att visa att

$$\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

och använd sedan detta, och det faktum att $\ln(1) = 0$ för att visa att

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

för alla $|x| < 1$.

Ledning: Om serieutvecklingen för en funktion $f(x)$ är

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

så är serieutvecklingen för derivatan $f'(x)$

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

5 Genererande funktioner

För att räkna antalet gitterpunkter i polytofer av högre dimension använder vi ett verktyg som kallas *genererande funktioner*. Vi vill visa att när vi förstorar en polyeder P med n växer antalet gitterpunkter $L_P(n)$ som ett tredjegrads-
polynom i n . Istället för att studera $L_P(n)$ direkt studerar vi den formella serien $\sum_{n=0}^{\infty} L_P(n)t^n$. Genom att uttrycka denna serie på ett annat sätt, som en kvot av polynom i t , får vi information om koefficienterna $L_P(n)$.

5.1 Genererande funktioner

Vi kommer nu betrakta oändliga följder av tal, $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ där a_n är ett reellt tal för varje $n = 0, 1, 2, \dots$.

Definition 5.1.1. Låt $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ vara en talföljd. Den *genererande funktionen* för talföljden $\mathbf{a}$ är den formella summan

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$$

i variabeln t . Här använder vi oändlighetssymbolen ∞ för att understryka att den formella summan består av oändligt många termer.

Anmärkning 5.1.2. När vi definierar genererande funktioner som *formella* summor så använder vi ordet formell för att understryka att det *inte* är frågan om någon vanlig funktion. Eftersom genererande funktioner är formella summor av uttryck på formen a_nt^n , så är det naturligt att jämföra genererande funktioner med polynom som är *ändliga* summor av sådana uttryck. Om vi i ett polynom $f(t)$ sätter variabeln t lika med till exempel talet 2 så kan vi beräkna $f(2)$, det vill säga polynomets värde i punkten $t = 2$. Om vi å andra sidan försöker sätta $t = 2$ i en genererande funktion stöter vi direkt på problem eftersom vi då får en oändlig summa och sådana kan vi i allmänhet inte beräkna! Därför tänker vi på genererande funktioner enbart som en kompakt notation för talföljden $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ och *inte* som en funktion.

Exempel 5.1.3. Betrakta talföljden $(1, 1, 1, \dots)$ med oändligt många upprepanande 1:or. Den tillhörande genererande funktionen är $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$. På samma sätt har talföljden $(2, 2, 2, \dots)$ med oändligt många 2:or den genererande funktionen $\sum_{n=0}^{\infty} 2t^n$. ▲

Exempel 5.1.4. Ett polynom $p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ är en genererande funktion till talföljden $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ med enbart nollor efter a_n -termen. Därför kan vi tänka på till exempel polynomet $p(t) = 5 + 2t + t^3$ som en genererande funktion för talföljden $(5, 2, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$. ▲

Definition 5.1.5. Låt $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ och $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots)$ vara två talföljder och låt $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$ och $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nt^n$ vara deras genererande funktioner. Då definierar vi

- (i) att $F(t)$ och $G(t)$ är *lika* om $a_n = b_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$,

(ii) *summan* av $F(t)$ och $G(t)$ som

$$F(t) + G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n,$$

(iii) *produkten* av $F(t)$ och $G(t)$ som

$$\begin{aligned} F(t) \cdot G(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n) t^n, \end{aligned}$$

(iv) *skalningen* av $F(t)$ med talet $k \in \mathbb{R}$ som

$$k \cdot F(t) = k \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} k a_n t^n.$$

Anmärkning 5.1.6. Här kan det vara på sin plats att förklara varför definitionerna ovan ser ut som de gör. En anledning är att de är tänkta att generalisera hur vi räknar med polynom. Om till exempel

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad \text{och} \quad g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$

är två polynom, så kan vi kontrollera att

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2, \\ f(t) \cdot g(t) &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)t + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)t^2 + \dots + (\dots)t^4, \\ k \cdot f(t) &= k a_0 + k a_1 t + k a_2 t^2. \end{aligned}$$

Definitionerna innebär också att andra vanliga räkneregler för polynom även gäller för genererande funktioner. Till exempel har vi att

$$F(t) \cdot (G(t) + H(t)) = F(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot H(t)$$

för genererande funktioner $F(t)$, $G(t)$ och $H(t)$, se Övning 5.3.

Anmärkning 5.1.7. Den genererande funktionen till $F(t) + G(t)$ är talföljden $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$. Vi noterar också att $F(t) \cdot G(t)$ är den genererande funktionen som hör till talföljden

$$(a_0 b_0, a_1 b_0 + a_0 b_1, a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2, \dots)$$

samt att $kF(t)$ är den genererande funktionen till talföljden $(k a_0, k a_1, \dots)$.

Definition 5.1.8. Låt $F(t)$ och $G(t)$ vara två genererande funktioner. Om $F(t) \cdot G(t) = 1$ säger vi att $G(t)$ är *inversen* till $F(t)$ och vice versa. Vi inför också notationen $G(t) = \frac{1}{F(t)}$.

Anmärkning 5.1.9. Vi tolkar uttrycket $G(t) = \frac{1}{F(t)}$ som att $G(t)$ är den genererande funktion vi ska multiplicera $F(t)$ med för att få 1. En anledning till att vi inför denna notation är för att Definition 5.1.5 gör att vi kan räkna med inversen $\frac{1}{F(t)}$ som om det vore en kvot av polynom.

Exempel 5.1.10. Betrakta talserien $(1, 1, 1, \dots)$ av oändligt många ettor. Den tillhörande genererande funktionen är $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$. Vi har att

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) \cdot (1-t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} = 1$$

där $1-t$ är den genererande funktionen till talföljden $(1, -1, 0, 0, \dots)$. Därmed drar vi slutsatsen att $(1-t)$ är inversen till $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$, det vill säga att

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}. \quad (5.1)$$

▲

I Exempel 5.1.10 ovan ser vi att det är viktigt att genererande funktioner egentligen *inte* får betraktas som vanliga funktioner som man kan evaluera. Till exempel så är $\frac{1}{1-t}$ inte ens definierad om vi sätter $t = 1$ då vi i sådana fall dividerar med 0. Vi ser också att om vi försöker evaluera likheten

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

i $t = 2$ får vi att $\frac{1}{1-2} = -1$ i högerledet, men i vänsterledet får vi den formella summan $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ som enbart består av positiva termer. Därför kan höger- och vänsterled omöjligt vara lika. Detta är ett konkret exempel på den poäng vi tidigare försökt understryka, nämligen att vi namnet till trots inte kan tänka på genererande funktioner som funktioner.

5.2 Heltalslösningar

I det här avsnittet ska vi använda genererande funktioner för att lösa följande kombinatoriska problem.

Exempel 5.2.1. På hur många sätt kan vi betala n kr med en- och tvåkronorsmynt? ▲

Låt a_n vara antalet sätt kan vi betala n kr med en- och tvåkronorsmynt. Notera att detta är antalet heltalslösningar till ekvationen $x + 2y = n$, där $x, y \geq 0$. Betrakta nu den genererande funktionen

$$F(t) = (1 + t + t^2 + \dots)(1 + t^2 + t^4 + \dots) = \left(\sum_{x=0}^{\infty} t^x\right) \left(\sum_{y=0}^{\infty} t^{2y}\right).$$

Vi kan skriva om detta uttryck genom att utveckla parenteserna enligt Definition 5.1.5. Detta ger

$$F(t) = \left(\sum_{x=0}^{\infty} t^x \right) \left(\sum_{y=0}^{\infty} t^{2y} \right) = \sum_{x,y \geq 0} t^x t^{2y}.$$

För varje lösning till ekvationen $x + 2y = n$ lägger vi på en term $t^x \cdot t^{2y} = t^n$. Antalet gånger vi lägger på t^n är alltså exakt antalet lösningar till $x + 2y = n$. Därmed är

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

den genererande funktionen för talföljden $a_0, a_1, a_2, \dots$. Vi kommer nu att kunna bestämma a_n genom att skriva om högerledet. Notera först att identiteten (5.1) ger

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots$$

Låt oss kalla denna genererande funktion för

$$H(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Vi ser nu att

$$\frac{1}{1-t^2} = H(t^2) = 1 + (t^2) + (t^2)^2 + (t^2)^3 + \dots = 1 + t^2 + t^4 + \dots$$

Därmed är

$$F(t) = (1 + t + t^2 + \dots)(1 + t^2 + t^4 + \dots) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}.$$

I Övning 5.14 visas att kvoten kan skrivas som en summa två kvoter enligt följande

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t^2} \right).$$

I Övning 5.15 visas identiteten

$$1 + 2t + 3t^2 + \dots = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Vi kan nu utveckla

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t^2} \right) &= \frac{1}{2} (1 + 2t + 3t^2 + \dots) + \frac{1}{2} (1 + t^2 + t^4 + \dots) \\ &= 1 + t + 2t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 3t^5 + \dots \end{aligned}$$

Notera att koefficienten framför t^n är $\frac{n}{2} + 1$ om n är jämnt och $\frac{n+1}{2}$ om n är udda. Detta kan skrivas kortare $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ där $\lfloor n/2 \rfloor$ noterar det största heltalet mindre än eller lika med $n/2$. Så genererande funktionen till a_n är

$$(1 + t + t^2 + \dots)(1 + t^2 + t^4 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lfloor n/2 \rfloor + 1) t^n.$$

Alltså kan n kr betalas på $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ sätt med en- och tvåkronor. För $n = 1, 2, 3, 4, 5$ får vi 1, 2, 2, 3, 3 sätt vilket stämmer överensstämmer med vanlig räkning.

Notera att vi kunde utvecklat direkt $(1 + t + t^2 + \dots)(1 + t^2 + t^4 + \dots) = 1 + t + 2t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 3t^5 + \dots$, men i andra fall kan det vara betydligt svårare. Just detta problem kunde vi dessutom löst enklare med en annan metod. I övningarna finns exempel där genererande funktioner ger en enklare lösning.

5.3 Kombinatorik och formella summor

I Kapitel 6 7 och 8 studerar vi hur antalet gitterpunkter i en polyeder växer när vi skalar upp/forstorar polyedern. Vi kommer specifikt att visa att antalet gitterpunkter i förstoringen nP växer som ett polynom i variabeln n .

För att visa detta använder vi flera av de följande resultaten för att förutsäga när en talföljd ges av ett polynom med hjälp av dess genererande funktion.

Hjälpsats 5.3.1. Låt $n, d \in \mathbb{N}$. Antalet lösningar till ekvationen $\sum_{i=1}^d x_i = n$ där alla $x_1, x_2, \dots, x_d$ är heltal så att $x_i \geq 0$ för alla $1 \leq i \leq d$ är $\binom{d-1+n}{d-1}$.

Bevis. Vi noterar först att varje positiv heltalslösning till ekvationen $\sum_{i=1}^d x_i = n$ motsvarar ett sätt att stoppa d stycken bollar i n lådor. Anledningen till det är att vi kan tänka på x_i som antalet bollar vi stoppar i låda i . Ingen låda kan ha ett negativt antal bollar och det finns exakt n bollar totalt så antalet lösningar är samma som antalet sätt att placera ut n stycken bollar i d lådor. Från Sats 4.1.9 kan detta göras på $\binom{(d-1)+n}{(d-1)}$ sätt. $\square$

Hjälpsats 5.3.2. Följande likhet mellan genererande funktioner gäller för $0 \leq k \leq d$:

$$\frac{t^k}{(1-t)^{d+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d-k+n}{d} t^n.$$

Bevis. Vi börjar med fallet $k = 0$. Vi såg i Exempel 5.1.10 att

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Därmed kan vi skriva om

$$\frac{1}{(1-t)^{d+1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right)^d = \underbrace{(1+t+t^2+\dots)(1+t+t^2+\dots)\dots(1+t+t^2+\dots)}_{d+1 \text{ gånger}}.$$

Produkten av dessa parenteser är en formell summa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ där a_n är antalet gånger som t^n fås som en produkt

$$t^n = t^{x_1} t^{x_2} \dots t^{x_d} = t^{x_1+x_2+\dots+x_d}$$

med $x_1+x_2+\dots+x_d = n$ där $x_i \geq 0$ kommer från parentes nummer i för alla $1 \leq i \leq d$. Detta är ekvivalent med att välja punkter $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in$

$\mathbb{Z}^{d+1}$ med $\sum_{i=1}^{d+1} x_i = n$ och $x_i \geq 0$ för alla i . Från Sats 5.3.1 kan detta göras på $\binom{d+n}{d}$ sätt. Därmed är $a_n = \binom{d+n}{d}$ för alla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Om vi nu har $1 \leq k \leq d$ så gäller det att

$$\frac{t^k}{(1-t)^{d+1}} = t^k \frac{1}{(1-t)^{d+1}} = t^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} t^{n+k}.$$

Denna serie innehåller inga termer av grad lägre än k så om vi sätter $m = n+k$ kan vi skriva om detta som

$$\frac{t^k}{(1-t)^{d+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} t^{n+k} = \sum_{m=k}^{\infty} \binom{d-k+m}{d} t^m = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{d-k+m}{d} t^m$$

vilket skulle visas. Den sista likheten här kommer från att $\binom{d-k+m}{d} = 0$ om $0 \leq m < k$ så vi kan lika gärna summera från $m = 0$ istället. $\square$

Genom att använda resultaten ovan kan vi nu formulera följande sats som ger information om när en talföljd $(f(0), f(1), f(2), \dots)$ ges av ett polynom.

Sats 5.3.3. *Antag att vi har följande likhet av formella uttryck:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)t^n = \frac{g(t)}{(1-t)^{d+1}}.$$

Då är $g(t)$ ett polynom av grad som mest d om och endast om $f(n)$ ett polynom av grad som mest d . Dessutom är $f(n)$ heltalsvärt om och endast om $g(t)$ har heltalskoefficienter.

Bevis. Eftersom $g(t)$ är ett polynom av grad som mest d så kan vi skriva

$$g(t) = a_d t^d + \dots + a_1 t + a_0,$$

för värden $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$. Detta ger enligt Hjälpssats 5.3.2

$$\begin{aligned} \frac{g(t)}{(1-t)^{d+1}} &= \sum_{k=0}^d a_k \frac{t^k}{(1-t)^{d+1}} \\ &= \sum_{k=0}^d a_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d-k+n}{d} t^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^d a_k \binom{d-k+n}{d} \right) t^n \end{aligned}$$

och därmed är

$$f(n) = \sum_{k=0}^d a_k \binom{d-k+n}{d}$$

ett polynom av grad $\leq d$.

För den andra riktningen av satsen noterar vi att Sats 4.2.7 ger att om f är ett polynom finns unika tal $a_0, \dots, a_d$ sådana att

$$f(n) = \sum_{k=0}^d a_k \binom{d-k+n}{d}$$

och därmed följer det att

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)t^n = \frac{g(t)}{(1-t)^{d+1}}$$

från argumentet ovan. Dessutom ger Sats 4.2.7 att $f(n)$ är heltalsvärt om och endast om koefficienterna $a_0, \dots, a_d$ till g är heltal. $\square$

Övningar

Övning 5.1 (★). (i) Bestäm femte talet i talföljden definierad av $a_n = 3n + 1$ som startar med a_1 .

(ii) Bestäm fjärde talet i talföljden definierad av $a_{n+2} - a_n = 2n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

Övning 5.2 (★). Låt $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ vara talföljden som har $\frac{1}{1+t}$ som genererande funktion. Vad är de fem första termerna i talföljden?

Övning 5.3 (★★). Visa att distributiva lagen gäller för genererande funktioner. Det vill säga, visa att om $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ och $H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ är genererande funktioner så gäller att

$$F(t) \cdot (G(t) + H(t)) = F(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot H(t).$$

Övning 5.4 (★★★). Bestäm konstanterna A och B så att

$$\frac{3t+1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}.$$

(Ledning: Använd metoden från Övning 5.10)

Övning 5.5 (★★). Visa att $x + y = n$, $x, y \geq 0$ har $n + 1$ lösningar med hjälp av genererande funktioner.

Övning 5.6 (★★). Vilken talföljd har genererande funktionen $f(x) = x^2 + 5x^3 + 4x^6 + 9x^8$?

Övning 5.7 (★★). Vad är genererande funktionen till talföljden $2, 4, 8, 16, \dots$?

Övning 5.8 (★★). En av de mest berömda talföljderna är Fibonaccisekvensen namngiven efter Leonardi Fibonacci som levde i Pisa omkring 1170-1250. Den definieras rekursivt genom $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$, så de första elementen i talföljden är $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$. I följande uppgifter kommer vi härleda en sluten formel som uttrycker a_n i n genom att använda genererande funktioner. Visa först att den genererande funktionen till Fibonaccisekvensen är $\frac{1}{1-t-t^2}$ genom att utveckla $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n)(1-t-t^2)$ likt Exempel 5.1.10.

Övning 5.9 (★). Visa att

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n = \frac{1}{1-at}$$

för alla $a \neq 0$.

Övning 5.10 (★★). (i) Expandera produkten $(1-\alpha_1 t)(1-\alpha_2 t)$ och visa att den är lika med $1-t-t^2$.

(ii) Visa att $A = \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}}$ och att $B = \frac{-\alpha_2}{\sqrt{5}}$. (Ledning: Visa först att

$$\frac{A}{1-\alpha_1 t} + \frac{B}{1-\alpha_2 t} = \frac{A+B-t(\alpha_1 B + \alpha_2 A)}{1-t-t^2}.$$

Då detta uttryck ska vara lika med $\frac{1}{1-t-t^2}$ så fås att täljarna måste vara lika, det vill säga att $1 = A+B-t(\alpha_1 B + \alpha_2 A)$. Speciellt måste dessa vara lika gradvis i t vilket ger ekvationssystemet $1 = A+B$ och $0 = \alpha_1 B + \alpha_2 A$.)

Övning 5.11 (★★). Använd Övning 5.10 och Övning 5.9 för att visa att $\frac{1}{1-t-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\sqrt{5}} \right) t^n$.

Övning 5.12 (★). Dra slutsatsen att det n :te Fibonaccitalet är lika med

$$a_n = \frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

för $n = 0, 1, 2, \dots$

Övning 5.13 (★★). Vad händer om vi låter Fibonaccisekvensen starta med $a_0 = 0, a_1 = 1$. Hur ser den genererande funktionen ut då?

Övning 5.14 (★★). (i) Ansätt $\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{D}{1+t}$ och visa att $A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{4}$.

(ii) Visa att $\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} = \frac{2}{1-t^2}$

(iii) Dra slutsatsen att $\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t^2} \right)$

Övning 5.15 (★★). Visa att

$$(1-t)^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n \right) = (1-t)^2(1+2t+3t^2+\dots) = 1$$

och dra slutsatsen att

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Övning 5.16 (★★). Låt a_n vara antalet positiva heltalslösningar till ekvationen

$$2x + 2y + z + w = n.$$

Visa att den motsvarande genererande funktionen är

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)^2}.$$

Vad är den genererande funktionen där a_n är antalet lösningar till

$$px + qy + rz + sw = n$$

för godtyckliga heltal p, q, r, s ?

Ledning: Använd samma metod som i Kaptiel .

Övning 5.17 (★). Låt $F(t)$ vara den genererande funktionen för talföljden $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Vad är talföljden för $tF(t)$?

Övning 5.18 (★★). I denna uppgift ska vi beräkna talföljden för den genererande funktionen

$$F(t) = \frac{1}{1+t+t^2}.$$

(i) Visa att

$$\frac{1}{1+t+t^2} = \frac{1}{1-t^3} - \frac{t}{1-t^3}.$$

(ii) Visa att

$$\frac{1}{1-t^3} = 1 + t^3 + t^6 + t^9 + \dots$$

(iii) Använd detta för att visa att

$$\frac{1}{1+t+t^2} = 1 - t + t^3 - t^4 + t^6 - t^7 + \dots,$$

alltså den motsvarande talföljden är

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \pmod{3} \\ -1 & n = 1 \pmod{3} \\ 0 & n = 2 \pmod{3} \end{cases}$$

(iv) Vad är talföljden för

$$\frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^d}?$$

Övning 5.19 (★★). Låt a_n vara antalet sätt man kan betala n kronor med en-kronor, två-kronor och (hypotetiska) tre-kronor

(i) Visa att den motsvarande genererande funktionen är

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}.$$

(ii) Hitta tal A, B, C, D sådana att

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \frac{A}{(1-t)^2} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1-t^2} + \frac{D}{1-t^3}.$$

(iii) Bestäm värdet på a_n för alla n .

6 Ehrhartserier och koner

Eftersom definitionerna av $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ är så lika kan man, varje gång man stöter på en sats som gäller i $\mathbb{R}^2$, fråga sig om satsen har någon motsvarighet i $\mathbb{R}^3$. Ett exempel på en sats som gäller i planet men som *inte* har någon motsvarighet i rummet är, som vi såg i Kapitel 3, Picks sats. När man hamnar i en sådan situation måste man ofta hitta ett nytt angreppssätt för att förstå vilka fenomen som generaliserar till högre dimensioner. I den här sektionen kommer vi att använda de vertyg vi har tagit fram kopplade till kombinatorik, polynom, och genererande funktioner för att konstruera nya invarianter och studera samband som fungerar även i högre dimensioner. I Kapitel 8 använder vi dessa för att studera sambandet mellan antal gitterpunkter och volym för polytober i högre dimensioner.

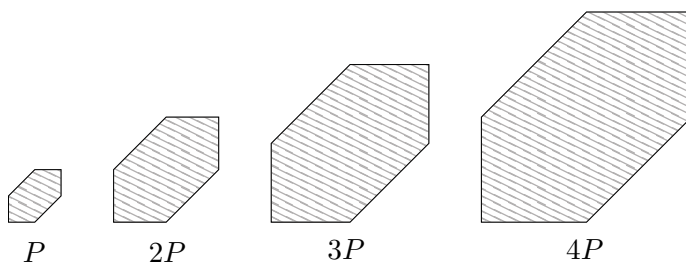
6.1 Ehrhartfunktionen

Vi såg i Exempel 3.3.13 att det inte finns någon motsvarighet till Picks sats för polyedrar. Det vill säga att det inte kan finnas en formel för volymen av en gitterpolyeder P som enbart beror på antalet gitterpunkter i P .

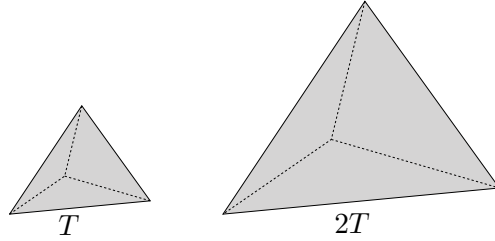
Trots vetenskapen om detta slutade inte matematiker att intressera sig för gitterpolyedrar. Så sent som på 1960-talet så studerade Eugène Ehrhart en funktion som gav en ny koppling mellan antalet gitterpunkter och volymen. Denna funktion kallas för *Ehrhartfunktionen* och för att kunna definiera den så behöver vi först introducera ett nytt geometriskt koncept, uppförstoringen av en polytop.

Definition 6.1.1. Låt $P = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ vara en polytop. För varje naturligt tal $n \in \mathbb{N}$ definierar vi *uppförstoringen av P med faktorn n* att vara polytopen $nP = \mathbf{K}(n\mathbf{x}_1, \dots, n\mathbf{x}_k)$.

Exempel 6.1.2. Nedan är ett exempel på en polygon P som blivit uppförstorad.

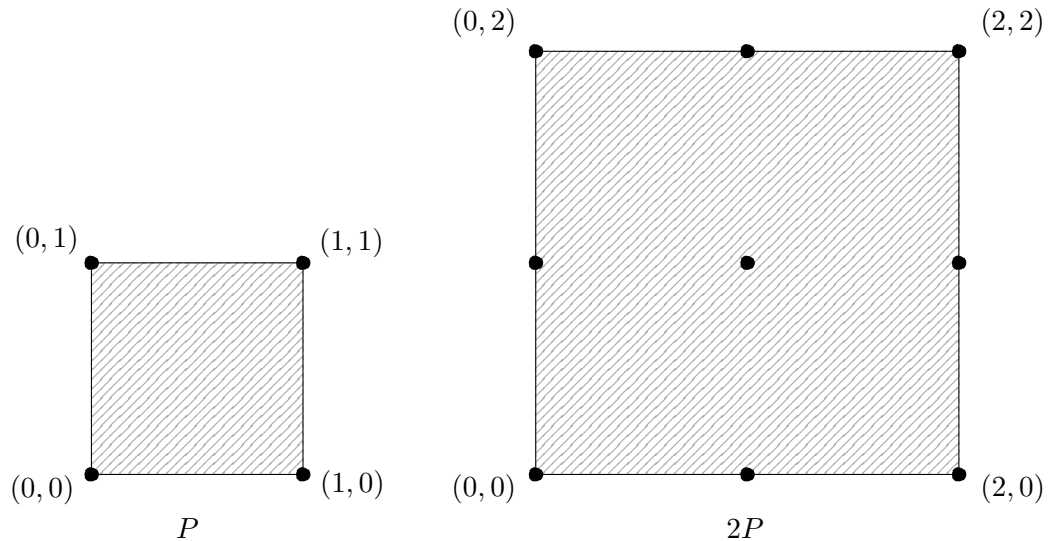


Ett exempel på en polyeder T som blivit uppförstorad är följande:



Definition 6.1.3. Låt P vara en gitterpolytop. Vi definierar *Ehrhartfunktionen* $L_P(n)$ av P genom att för varje $n \in \mathbb{N}$ låta $L_P(n)$ vara antalet gitterpunkter i nP .

Exempel 6.1.4. Låt P vara kvadraten med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$. Om vi ritar P och uppförstoringen $2P$ får vi följande.



Vi ser att P innehåller fyra stycken gitterpunkter vilket innebär att $L_P(1) = 4$. Eftersom $2P$ innehåller nio stycken gitterpunkter så är $L_P(2) = 9$. 

Vi vill nu relatera Ehrhartfunktionen av en gitterpolygon till Picks sats från Kapitel 2. För att göra detta behöver vi först förstå hur arean av en polygon förändras när den uppförstoras med en faktor n .

Hjälpsats 6.1.5. Låt P vara en gitterpolygon, låt n vara ett positivt heltal och låt r_n vara antalet gitterpunkter på randen till nP . Då gäller att

- (i) $\text{Area}(nP) = n^2 \text{Area}(P)$ och
- (ii) $r_n = n \cdot r_1$.

Bevis. Se Övning 6.6.



Sats 6.1.6. Låt P vara en gitterpolygon med Ehrhartfunktion $L_P(n)$ och med r stycken gitterpunkter på sin rand. Om $a_2 = \text{Area}(P)$, $a_1 = \frac{r}{2}$ och $a_0 = 1$ så är $L_P(n) = a_2 n^2 + a_1 n + a_0$, vilket är ett andragradspolynom i n .

Bevis. Låt i_n vara antalet inre gitterpunkter i nP och låt r_n vara antalet gitterpunkter på randen till nP . Speciellt är då $r_1 = r$. Det totala antalet gitterpunkter i nP är då $L_P(n) = i_n + r_n$. Genom att göra de två räknetricken att skriva $r_n = \frac{r_n}{2} + \frac{r_n}{2}$ och att addera med $0 = 1 - 1$, får vi att

$$L_P(n) = i_n + r_n = i_n + \frac{r_n}{2} + \frac{r_n}{2} + (1 - 1) = \left(i_n + \frac{r_n}{2} - 1\right) + \frac{r_n}{2} + 1.$$

Från Picks sats, Sats 2.2.10, har vi att $\text{Area}(nP) = i_n + \frac{r_n}{2} - 1$ vilket ger att

$$L_P(n) = \left(i_n + \frac{r_n}{2} - 1\right) + \frac{r_n}{2} + 1 = \text{Area}(nP) + \frac{r_n}{2} + 1.$$

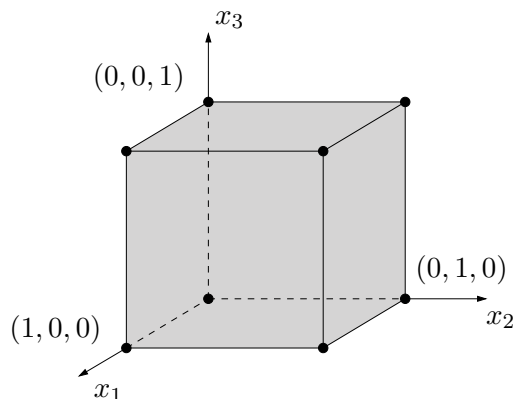
Slutligen säger Hjälpsats 6.1.5 att $\text{Area}(nP) = n^2 \text{Area}(P)$ och $r_n = nr_1 = nr$ så

$$L_P(n) = \text{Area}(nP) + \frac{r_n}{2} + 1 = n^2 \text{Area}(P) + \frac{nr}{2} + 1.$$

Därmed är $L_P(n) = a_2 n^2 + a_1 n + a_0$, där $a_2 = \text{Area}(P)$, $a_1 = \frac{r}{2}$ och $a_0 = 1$. $\square$

Som sagt såg vi i Exempel 3.3.13 att Picks sats inte gick att generalisera till gitterpolyedrar. Vad som däremot är sant är att Ehrhartfunktionen för en gitterpolyeder alltid är ett tredjegradspolynom och att koefficienten framför n^3 i detta polynom är lika med volymen av polyedern. Båda dessa resultat kommer vi bevisa i Kapitel 8. Här inleder vi med att studera funktionen $L_P(n)$ för en av de enklaste gitterpolyedrarna.

Exempel 6.1.7. Enhetskuben K i $\mathbb{R}^3$ är kuben vars hörn utgörs av alla gitterpunkter $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ så att $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$. Notera att enhetskuben har sidlängd 1.



Vi ser att det finns åtta stycken gitterpunkter i K , så $L_K(1) = 8$. Om vi istället betraktar förstoringen $2K$ (och markerar mittenlagret för tydlighetens skull)

Bevis. Genom att representera gitterpunkter med bollar i lådor som ovan inser vi att detta handlar om att lägga *som mest* n stycken bollar i 3 stycken lådor vilket enligt Sats 4.1.10 är lika med $\binom{3+n}{3}$. $\square$

Följdsats 6.1.10. Låt T vara tetraedern

$$T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Då är

$$L_T(n) = \binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6}.$$

Bevis. Enligt Övning 6.3 består nT av punkter på formen

$$\lambda_1(0, 0, 0) + \lambda_2(1, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 0) + \lambda_4(0, 0, 1) = (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

så att $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ och $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = n$. Då $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ ej innehåller något λ_1 kan detta skrivas som $\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \leq n$. Om vi ändrar notation från λ till x får vi därmed att

$$nT = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ och } x_1 + x_2 + x_3 \leq n\}.$$

Gitterpunkterna i nT är därför

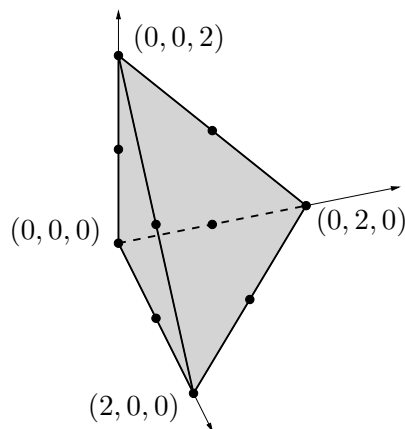
$$nT \cap \mathbb{Z}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ och } x_1 + x_2 + x_3 \leq n\}.$$

och resultatet följer nu direkt av Sats 6.1.9. $\square$

Exempel 6.1.11. Låt T vara tetraedern med hörn i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. Enligt Följdsats 6.1.10 är antalet gitterpunkter i

$$2T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2))$$

lika med $\binom{3+2}{3} = \binom{5}{3} = 10$. Från följande bild:



kan vi se att dessa punkter är

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), \\ (1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2).$$

▲

6.2 Ehrhartserien

Precis som vi såg i exempelvis Kapitel 5.16 kan genererande funktioner ofta vara ett kraftfullt verktyg för att studera talföljder. Det kommer att visa sig att de är mycket användbara för att studera talföljden $(L_P(0), L_P(1), L_P(2), \dots)$ av antalet gitterpunkter i uppförstoringarna av en gitterpolytop P . Speciellt kommer genererande funktioner vara en viktig del i att visa att $L_P(n)$ är ett tredjegradspolynom i n om P är en gitterpolyeder.

Definition 6.2.1. Låt P vara en gitterpolytop. Vi definierar *Ehrhartserien* för P att vara den genererande funktionen

$$\text{Ehr}_P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_P(n)t^n$$

till sekvensen $(L_P(0), L_P(1), L_P(2), \dots)$.

Exempel 6.2.2. Låt K vara kuben från Exempel 6.1.7. I det exemplet noterade vi att $L_K(n) = (n+1)^3$. Därför är

$$\text{Ehr}_K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^3 t^n$$

Ehrhartserien till K . ▲

Exempel 6.2.3. Låt T vara tetrahedern

$$T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)).$$

Enligt Följdsats 6.1.10 är $L_P(n) = \binom{n+3}{n}$ och därmed ger Hjälpsats 5.3.2 att

$$\text{Ehr}_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n}{n} t^n = \frac{1}{(1-t)^4}.$$

▲

I exemplen ovan använde vi att vi kände till Ehrhartfunktionen för att beräkna Ehrhartserien för de olika polytoperna. I följande exempel gör vi tvärt om och hittar ett uttryck för Ehrhartfunktionen med hjälp utav Ehrhartserien.

Exempel 6.2.4. Låt T vara tetrahedern

$$T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)).$$

Då består nT av punkter på formen

$$p = \lambda_1(0, 0, 0) + \lambda_2(1, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 0) + \lambda_4(0, 0, 2) = (\lambda_2, \lambda_3, 2\lambda_4)$$

så att $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ och $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = n$. Här gäller inte längre att alla λ_i måste vara heltal för att p ska vara en gitterpunkt. Exempelvis ger

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

gitterpunkten $(0, 0, 1)$. För att komma runt detta byter vi variabler till $x_2 = \lambda_2, x_3 = \lambda_3$ och $x_0 = 2\lambda_0, x_4 = 2\lambda_4$. Vi har att punkten

$$p = \lambda_1(0, 0, 0) + \lambda_2(1, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 0) + \lambda_4(0, 0, 2) = (x_2, x_3, x_4)$$

i nT är en gitterpunkt om och endast om x_2, x_3, x_4 alla är heltal. Detta innebär i sin tur att

$$x_1 = 2\lambda_1 = 2n - 2x_2 - 2x_3 - x_4$$

också är ett heltal. Därmed gäller att antalet gitterpunkter i nT är antalet positiva heltalslösningar till ekvationen

$$\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2} = n$$

vilket kan skrivas om till

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2n$$

Från Uppgift 5.16 vet vi att om a_n är antal lösningar till $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = n$ så är

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)^2}.$$

Vi vill dock beräkna den genererande funktionen

$$\text{Ehr}_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

där $b_n = a_{2n}$ är antalet lösningar till

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2n, \text{ inte } = n.$$

För detta kan vi använda ett trick. Notera först att

$$\text{Ehr}_T(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n}.$$

Alltså är $\text{Ehr}_T(t^2)$ den genererande funktionen vi får genom att bara ta de jämna termerna i $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Notera nu att

$$F(-t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n t^n.$$

Därmed är

$$\frac{1}{2}(F(t) + F(-t)) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n} = \text{Ehr}_T(t^2).$$

Vi kan förenkla detta uttryck såhär:

$$\begin{aligned}
\text{Ehr}_T(t^2) &= \\
&= \frac{1}{2}(F(t) + F(-t)) \\
&= \frac{1/2}{(1-t)^2(1-t^2)^2} + \frac{1/2}{(1+t)^2(1-t^2)^3} \\
&= \frac{1}{(1-t^2)^2(1-t)^2(1+t)^2} \left(\frac{1}{2}(1+t)^2 + \frac{1}{2}(1-t)^2 \right) \\
&= \frac{1+t^2}{(1-t^2)^4}.
\end{aligned}$$

Eftersom att

$$\text{Ehr}_T(t^2) = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^4}$$

så har vi att

$$\text{Ehr}_T(t) = \frac{1+t}{(1-t)^4}.$$

Enligt Sats 5.3.2 innebär detta att Ehrhartfunktionen för T är

$$L_T(n) = \binom{3+n}{3} + \binom{2+n}{3}.$$

▲

Att skriva ner Ehrhartserien $\text{Ehr}_P(t)$ för en allmän gitterpolyeder P är betydligt svårare än exemplet ovan. Vi kommer däremot kunna använda Ehrhartserien för att i Kapitel 7 och 8 visa att Ehrhartfunktionen är ett polynom.

6.3 Koner

Vi introducerar nu konen över en polytop P som kommer beskriva alla förstoringar av P samtidigt. Speciellt kommer vi se att gitterpunkterna i konen är starkt förknippade med Ehrhartserien av P .

Vi kommer för en punkt $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ och ett tal $n \in \mathbb{N}$ använda notationen $(\mathbf{v}, n)$ för punkten $(x_1, x_2, \dots, x_d, n) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Till exempel, om $\mathbf{v} = (2, 1)$ så är $(\mathbf{v}, 4) = (2, 1, 4)$.

Definition 6.3.1. Låt $P \subset \mathbb{R}^d$ vara en polytop med hörnen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$. Vi definierar *konen över P* som

$$\text{Kon}(P) = \{k_1(\mathbf{v}_1, 1) + k_2(\mathbf{v}_2, 1) + \dots + k_m(\mathbf{v}_m, 1) \mid k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0\}$$

vilket är en delmängd av $\mathbb{R}^{d+1}$. Vidare definierar vi *höjden* av en punkt $(x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) \in \text{Kon}(P)$ att vara punktens sista koordinat, x_{d+1} .

Notera att om P ligger i $\mathbb{R}^d$ så är $\text{Kon}(P)$ en delmängd av $\mathbb{R}^{d+1}$. Alltså, om P är en polygon i $\mathbb{R}^2$ så är konen $\text{Kon}(P)$ en delmängd i $\mathbb{R}^3$ och om P är en polyeder i $\mathbb{R}^3$ så ligger konen $\text{Kon}(P)$ i $\mathbb{R}^4$.

Exempel 6.3.2. Låt $P = \mathbf{K}(0, 1) \subset \mathbb{R}$, det vill säga linjesegmentet i $\mathbb{R}$ från 0 till 1. Då är konen över P lika med mängden

$$\text{Kon}(P) = \{k_1(0, 1) + k_2(1, 1) \mid k_1, k_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

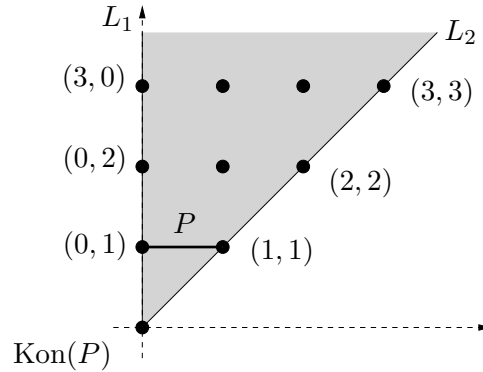
För att beskriva $\text{Kon}(P)$ geometriskt noterar vi att mängden

$$L_1 = \{k_1(0, 1) \mid k_1 \geq 0\} = \{(0, k_1) \mid k_1 \geq 0\}$$

är precis den icke-negativa delen av x_2 -axeln. Vidare är mängden

$$L_2 = \{k_2(1, 1) \mid k_2 \geq 0\} = \{(k_2, k_2) \mid k_2 \geq 0\}$$

lika med linjen från origo som går igenom punkten $(1, 1)$. Som en konsekvens måste varje punkt på formen $k_1(0, 1) + k_2(1, 1)$ vara en summa av en punkt på linjen L_1 och en punkt på linjen L_2 . Detta ger oss att konen över P har följande utseende (där vi även markerat gitterpunkterna):



Vi ser att P själv återfinns i konen på höjd 1. ▲

Exempel 6.3.3. Låt P vara triangeln $\mathbf{K}((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$. Varje punkt $\mathbf{x}$ som ligger i konen $\text{Kon}(P)$ kan då skrivas som

$$\mathbf{x} = k_1(0, 0, 1) + k_2(1, 0, 1) + k_3(0, 1, 1)$$

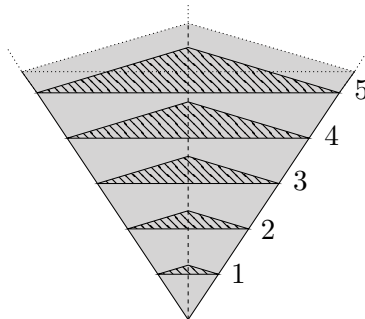
med $k_1, k_2, k_3 \geq 0$. Vi observerar först att mängderna

$$\begin{aligned} L_1 &= \{k_1(0, 0, 1) \mid k_1 \geq 0\} = \{(0, 0, k_1) \mid k_1 \geq 0\}, \\ L_2 &= \{k_2(1, 0, 1) \mid k_2 \geq 0\} = \{(k_2, 0, k_2) \mid k_2 \geq 0\}, \\ L_3 &= \{k_3(0, 1, 1) \mid k_3 \geq 0\} = \{(0, k_3, k_3) \mid k_3 \geq 0\}, \end{aligned}$$

är de tre linjerna som går från origo genom punkterna $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ respektive $(0, 1, 1)$. Därmed drar vi slutsatsen att en punkt på formen

$$\mathbf{x} = k_1(0, 0, 1) + k_2(1, 0, 1) + k_3(0, 1, 1)$$

med $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ är summan av en punkt på var och en av de tre linjerna beskrivna ovan. Eftersom k_1 , k_2 och k_3 var godtyckliga kan vi dra slutsatsen att konen $\text{Kon}(P)$ består av mängden av alla sådana summor.



Denna figur är alltså konen över triangeln $P = \mathbf{K}((0,0), (1,0), (0,1))$ där vi markerat snitten på höjderna 1, 2, 3, 4 och 5. Notera att alla snitt är trianglar av samma form som P själv. ▲

Det är värt att anmärka på vilka likheter och skillnader som finns mellan denna sorts koner och "vanliga" koner som ni är bekanta med till vardags. Likt en vanlig kon så har en sådan här punkt en "spets" som för oss ligger på koordinaten $(0,0,0,\dots,0)$ och alla andra punkter ligger på raka linjer som strålar ut från den punkten. Till skillnad från en vanlig kon har våra koner dock inte cirkulära tvärsnitt utan deras snitt är gitterpolytober, t.ex trianglar, som i figuren ovan. Dessutom har dessa koner inte någon höjd utan de sträcker sig "uppåt" i all oändlighet.

I de två exemplen ovan så noterar vi att polytopen P själv förekommer i konen som snittet på höjd 1. Vi ser till och med att förstoringen av P med faktorn n förekommer som snittet av konen på höjd n . Detta är inte en tillfällighet i dessa exempel utan gäller för godtyckliga polytober.

Sats 6.3.4. Låt P vara en polytop i $\mathbb{R}^d$ och låt $n \in \mathbb{N}$. Då är

$$\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \mid (\mathbf{v}, n) \in \text{Kon}(P)\} = nP.$$

Det vill säga att om man tar bort sista koordinaten från alla punkter i konen över P på höjd n så får man precis förstoringen nP av P .

Bevis. Låt $P = \mathbf{K}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ och låt $M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \mid (\mathbf{v}, n) \in \text{Kon}(P)\}$. För att visa att mängderna M och nP är lika visar vi att de är delmängder av varandra.

Vi börjar med att ta ett $\mathbf{v} \in M$. Per definition är då $\mathbf{x} = (\mathbf{v}, n)$ en punkt i $\text{Kon}(P)$ och är därför på formen

$$\mathbf{x} = k_1(\mathbf{v}_1, 1) + k_2(\mathbf{v}_2, 1) + \dots + k_m(\mathbf{v}_m, 1)$$

för några $k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0$. Därmed har vi att

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, n) = \mathbf{x} &= k_1(\mathbf{v}_1, 1) + k_2(\mathbf{v}_2, 1) + \dots + k_m(\mathbf{v}_m, 1) = \\ &= (k_1\mathbf{v}_1, k_1) + (k_2\mathbf{v}_2, k_2) + \dots + (k_m\mathbf{v}_m, k_m) = \\ &= (k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_m\mathbf{v}_m, k_1 + k_2 + \dots + k_m) \end{aligned}$$

så $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_m\mathbf{v}_m$ och $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$. Alltså är $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ en punkt på formen

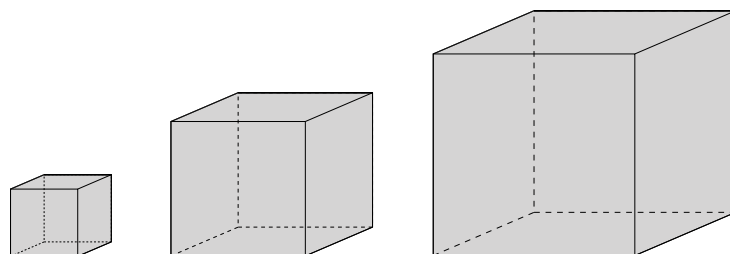
$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_m\mathbf{v}_m$$

med $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ och $k_i \geq 0$ för $i = 1, 2, \dots, m$. Detta ger från Övning 6.3 att $\mathbf{v} \in nP$. Därmed har vi visat att om $\mathbf{v} \in M$ så är $\mathbf{v} \in nP$, vilket medför att $M \subseteq nP$.

Att $nP \subseteq M$ visas i Övning 6.10.

De två inklusionerna medför nu att $nP = M$. □

Exempel 6.3.5. Om vi låter K vara enhetskuben från Exempel 6.2.2 så kommer $\text{Kon}(K)$ att vara 4-dimensionell. Som vi noterade i slutet av Kapitel 3 är fyrdimensionella objekt svåra att visualisera. Speciellt är det svårt att föreställa sig hur konen över K ser ut. Ett sätt att försöka föreställa sig $\text{Kon}(K)$ är att använda sig av Sats 6.3.4 som säger hur snittet av $\text{Kon}(K)$ ser ut på olika höjder. Mer precist så säger satsen att mängden av alla punkter i $\text{Kon}(K)$ med x_4 -koordinat lika med n är nK , kuben med sidlängd n .



Figur 6.1: Snitt av $\text{Kon}(K)$ på höjd 1, 2 och 3

Därmed kommer snitten av konen över K i varje höjd vara en kub, på samma sätt som att snitten av konen över triangeln från Exempel 6.3.3 i varje höjd var en triangel. ▲

Koner ger oss ett nytt, och förvånandsvårt användbart sätt att tänka på Ehrhartserien. Vi kommer att gå in på mer detaljer i nästa kapitel men idén är följande:

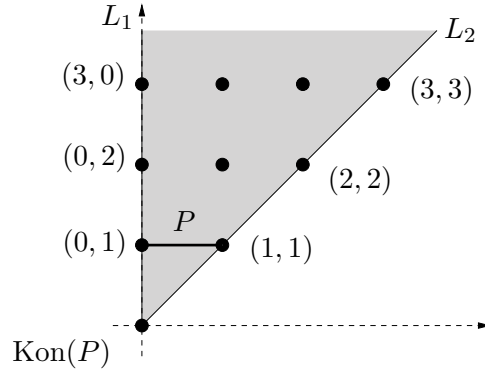
Låt K vara konen för någon viss polyeder i $\mathbb{R}^d$. Definiera sedan den genererande funktionen

$$S_K(1, t) = \sum_{\mathbf{x} \in K \cap \mathbb{Z}^{d+1}} t^{x_{d+1}}.$$

Med andra ord är $S_K(1, t)$ alltså den genererande funktion vi får av att, för varje gitterpunkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d, x_{d+1})$ lägga på en till $t^{x_{d+1}}$ -term.

OBS: Vi förklarar vad 1:an i $S_K(1, t)$ betyder nästa vecka så ni kan ignorera den tills vidare!

Betrakta nu åter igen konen över den endimensionella polytopen $P = [0, 1]$.



Varje gitterpunkt av höjd n vi ser i figuren motsvarar en pålagd term t^n term i serien $S_{\text{Kon}(P)}(1, t)$. Låt oss skriva ut de första termerna och punkterna de motsvarar:

$$\begin{aligned} S_{\text{Kon}(P)}(1, t) &= \\ &= \underbrace{t^0}_{(0,0)} + \underbrace{t^1}_{(0,1)} + \underbrace{t^1}_{(1,1)} + \underbrace{t^2}_{(0,2)} + \underbrace{t^2}_{(1,2)} + \underbrace{t^2}_{(2,2)} + \dots \\ &= 1 + 2t + 3t^2 + \dots \end{aligned}$$

Eftersom vi lägger till en term t^n för varje gitterpunkt med höjden n i konen ser vi att om $S_{\text{Kon}(P)}(1, t) = \sum_n a_n t^n$ så är a_n antalet gitterpunkter på höjd n i $\text{Kon}(P)$. Detta är samma sak som antalet gitterpunkter i nP enligt Sats 6.3.4 och därför är $S_{\text{Kon}(P)}(1, t) = \text{Ehr}_P(t)$. Ingen del av detta argument använde att P var just den endimensionella polytopen $[0, 1]$ och därför gäller alltid att

$$S_{\text{Kon}(P)}(1, t) = \text{Ehr}_P(t).$$

I nästa kapitel återupprepas detta resultat och visar hur det kan användas för att studera Ehrhartserien hos en godtycklig tetraeder.

Övningar

Övning 6.1 (★★). Låt $P = \mathbf{K}((0, 0), (1, 0), (0, 1))$.

- (i) Rita P och $2P$ och använd dessa figurer för att bestämma $L_P(1)$ och $L_P(2)$.
- (ii) Använd Sats 6.1.6 för att bestämma Ehrhartfunktionen till P och beräkna $L_P(n)$ för $n = 1, 2, 3, 4$.
- (iii) Vad är Ehrhartserien för P ?

Övning 6.2 (★). Hur många gitterpunkter har polygonen

$$P = \mathbf{K}((1, 0), (0, 0), (1, 1))?$$

Hur många gitterpunkter har $3P$?

Övning 6.3 (★★). Låt $P = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ vara en polytop. Visa att

$$nP = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0 \text{ och } \lambda_1 + \dots + \lambda_k = n\}.$$

Övning 6.4 (★). Låt $n \in \mathbb{N}$. Hur många gitterpunkter $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ så att $x_i \geq 0$ för $i = 1, 2$ och $x_1 + x_2 \leq n$ finns det?

Övning 6.5 (★). Låt $T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$. Vad är $L_T(6)$?

Övning 6.6 (★★★). Visa Hjälpssats 6.1.5 genom att göra följande.

- (i) (a) Börja med att triangulera polygonen P (*Ledning:* Använd metoden från beviset av Hjälpssats 2.2.8). Motivera varför det räcker att visa påståendet för trianglar.
- (b) När man förstörar P med n blir varje längd n gånger längre. Använd att arean av en triangel T ges av $\frac{bh}{2}$ där b är basen och h är höjden för att visa att $\text{Area}(nT) = n^2 \text{Area}(T)$.
- (ii) (a) Börja med att visa att uppförstoringen av ett linjesegment med k stycken punkter har $nk - (n - 1)$ stycken gitterpunkter.
- (b) Låt $L_1, L_2, \dots, L_m$ vara linjesegmenten på randen av P , där L_i har k_i stycken gitterpunkter för $i = 1, 2, \dots, m$. Visa att antalet gitterpunkter på randen ges av $k_1 + k_2 + \dots + k_m - m$.
- (c) Linjesegmenten på randen av nP ges av $nL_1, nL_2, \dots, nL_m$. Använd detta för att beräkna r_n .

Övning 6.7 (★★). Låt P vara tetraedern med hörn $(0, 0, 3), (1, 1, 3), (0, 1, 3), (0, 3, 4)$. Visa att

$$L_P(n) = L_T(n) = \binom{3+n}{3}$$

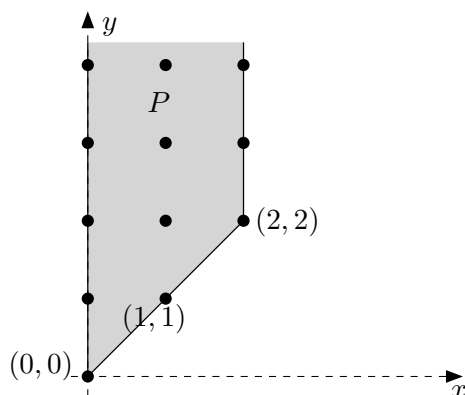
där T är tetraedern med hörn $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Övning 6.8 (★★). Låt T vara tetraedern med hörn $(0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)$. Följ metoden i Exempel 6.2.4 för att hitta ett uttryck för $L_T(n)$.

Övning 6.9 (★★★). Låt T vara tetraedern med hörn $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 3)$. Följ metoden i Exempel 6.2.4 för att hitta ett uttryck för $L_T(n)$.

Övning 6.10 (★★). Gör klart beviset av Sats 6.3.4 genom att visa att $nP \subseteq M$.

Övning 6.11 (★). Är följande figur en kon över en polytop i $\mathbb{R}^1$?



7 Ehrhartserier och tetraedra

Vi avslutade kapitel sex med att skriva Ehrhartserie av en polyeder P som en formell summa över gitterpunkter i konen av P . I detta kapitel kommer vi en mer detaljerad förklaring av detta som även involverar formella summor i fler än en variabel. Vi använder sedan detta för att hitta Ehrhartserien för en tetraeder.

7.1 Ehrhartserien och konen över en polyeder

Vi har nu sett två sätt att studera en gitterpolytop P tillsammans med uppförstoringarna nP för alla $n \in \mathbb{N}$. Det första sättet var med hjälp av Ehrhartserien som var den genererande funktionen

$$\text{Ehr}_P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_P(n)t^n.$$

Det andra sättet var genom konen över P som hade egenskapen att mängden av alla punkter på höjd n i $\text{Kon}(P)$ var nP . Eftersom $L_P(n)$ är lika med antalet gitterpunkter i nP så följer det att Ehrhartserien räknar upp de oändligt många gitterpunkterna i konen över P genom att först räkna alla på höjd 0, sedan alla på höjd 1, sedan alla på höjd 2 och så vidare.

En väldigt kraftfull men samtidigt enkel teknik i matematik är att räkna en sak på två olika sätt och sedan jämföra de två resultaten. Vi vet att Ehrhartserien räknar alla gitterpunkter i konen genom att summera antalet gitterpunkter i varje höjd. Nu vill vi försöka räkna antalet gitterpunkter i konen på ett annat sätt.

För att göra detta börjar vi med att associera en produkt av variabler till en gitterpunkt.

Definition 7.1.1. Till varje gitterpunkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ i $\mathbb{R}^d$ associerar vi uttrycket

$$s_1^{x_1} s_2^{x_2} \dots s_d^{x_d},$$

i d stycken variabler $s_1, s_2, \dots, s_d$ så att variabel s_i svarar mot koordinat x_i för $i = 1, 2, \dots, d$. Vi inför även den förkortade notationen $s^{\mathbf{x}} = s_1^{x_1} s_2^{x_2} \dots s_d^{x_d}$.

Exempel 7.1.2. I $\mathbb{R}^2$ har en gitterpunkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ två koordinater och hör därför till uttrycket $s^{\mathbf{x}} = s_1^{x_1} s_2^{x_2}$ i de två variablerna s_1 och s_2 . Till exempel motsvarar gitterpunkten $(3, 5)$ uttrycket $s^{(3,5)} = s_1^3 s_2^5$ och gitterpunkten $(7, 14)$ motsvarar $s^{(7,14)} = s_1^7 s_2^{14}$. ▲

Exempel 7.1.3. I $\mathbb{R}^4$ har en gitterpunkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ fyra koordinater och vi associerar denna punkt till uttrycket $s^{\mathbf{x}} = s_1^{x_1} s_2^{x_2} s_3^{x_3} s_4^{x_4}$ i variablerna s_1, s_2, s_3 och s_4 . Exempelvis är $(5, 4, 6, 7)$ en gitterpunkt i $\mathbb{R}^4$ som hör till uttrycket $s^{(5,4,6,7)} = s_1^5 s_2^4 s_3^6 s_4^7$. ▲

Definition 7.1.4. För en delmängd $M \subset \mathbb{R}^d$ definierar vi den formella summan

$$S_M(s) = \sum_{\mathbf{x} \in M \cap \mathbb{Z}^d} s^{\mathbf{x}}.$$

Exempel 7.1.5. Låt P vara linjesegmentet $\mathbf{K}(0, 1)$ i $\mathbb{R}$ från Exempel 6.3.2. Mängden av gitterpunkter till P är $P \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}$ och vi får att

$$S_P(s) = \sum_{x \in P \cap \mathbb{Z}} s^x = \sum_{x \in \{0, 1\}} s^x = s^0 + s^1. \quad \blacktriangle$$

Exempel 7.1.6. Låt P vara triangeln $\mathbf{K}((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ som vi såg i Exempel 6.3.3. Gitterpunkterna i P är precis hörnen $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$ så det följer att

$$S_P(s) = \sum_{\mathbf{x} \in P \cap \mathbb{Z}^2} s^{\mathbf{x}} = s^{(0,0)} + s^{(1,0)} + s^{(0,1)} = s_1^0 s_2^0 + s_1^1 s_2^0 + s_1^0 s_2^1. \quad \blacktriangle$$

Eftersom varje gitterpolytop P har ändligt många gitterpunkter så kommer $S_P(s)$ att vara en ändlig summa och antalet termer i $S_P(s)$ kommer per definition vara lika med antalet gitterpunkter i P . Då $S_P(s)$ har ändligt många termer så kan vi *evaluera* $S_P(s)$ i $s = 1$, med vilket vi menar att vi sätter alla komponenter till $s_1 = s_2 = \dots = s_d = 1$. När $s = 1$ får vi även att

$$s^{\mathbf{x}} = s_1^{x_1} \dots s_d^{x_d} = 1^{x_1} \cdot 1^{x_2} \dots 1^{x_d} = 1$$

så värdet $S_P(1)$ blir det tal vi får om vi byter ut ut alla termer i $S_P(s)$ mot 1. Med andra ord är $S_P(1)$ lika med antalet termer i $S_P(s)$ vilket i sin tur är antalet gitterpunkter i P . Med andra ord har vi att om P har m stycken gitterpunkter så blir $S_P(1) = m$, där vi med $S_P(1)$ menar evalueringen av $S_P(s)$ i $s = 1$.

Exempel 7.1.7. Låt P vara triangeln från Exempel 7.1.6. Då har vi att $S_P(s) = s^{(0,0)} + s^{(1,0)} + s^{(0,1)}$ och att $S_P(1) = 1 + 1 + 1 = 3$. $\blacktriangle$

Till skillnad från en gitterpolytop P så innehåller konen över P oändligt många gitterpunkter. Därför har $S_{\text{Kon}(P)}(s)$ oändligt många termer. Trots detta kan vi göra följande användbara omskrivning av $S_{\text{Kon}(P)}(s)$.

Hjälpssats 7.1.8. Låt P vara en polytop i $\mathbb{R}^d$. Då gäller att

$$S_{\text{Kon}(P)}(s) = S_{0P}(s) \cdot s_{d+1}^0 + S_P(s) \cdot s_{d+1}^1 + S_{2P}(s) \cdot s_{d+1}^2 + \dots$$

Bevis. Per definition så består $S_{\text{Kon}(P)}(s)$ av termer på formen $s^{\mathbf{x}}$ där $\mathbf{x}$ är en gitterpunkt i konen $\text{Kon}(P)$. Enligt Sats 6.3.4 är varje gitterpunkt $\mathbf{x}$ på höjd n på formen $\mathbf{x} = (\mathbf{v}, n)$ där $\mathbf{v}$ är en gitterpunkt i nP . Därmed är $S_{\text{Kon}(P)}(s)$ en summa av termer på formen $s^{(\mathbf{v}, n)}$ där $n \in \mathbb{N}$ och $\mathbf{v}$ är en gitterpunkt i nP . Satsen följer nu genom att ordna termerna $s^{(\mathbf{v}, n)} = s^{\mathbf{v}} s_{d+1}^n$ efter värdet på n . $\square$

Efter att ha sett denna sats noterar vi att den sista variabeln s_{d+1} utmärker sig från de övriga när man betraktar konen över en polytop P . Vi inför därför notationen $t = s_{d+1}$ så att varje gitterpunkt $(\mathbf{v}, n) \in \text{Kon}(P)$ associeras till uttrycket $s^{\mathbf{v}} t^n$ enligt Definition 7.1.1. Vår nya notation gör att vi kan skriva om resultatet från Hjälpssats 7.1.8 som

$$S_{\text{Kon}(P)}(s, t) = S_{0P}(s) \cdot t^0 + S_P(s) \cdot t^1 + S_{2P}(s) \cdot t^2 + \dots$$

Vi har alltså att $S_{\text{Kon}(P)}(s, t)$ är en summa av uttryck på formen $S_{nP}(s) \cdot t^n$ för $n \in \mathbb{N}$. Eftersom $S_{nP}(s)$ är en ändlig summa för varje n så kan vi för varje n evaluera $S_{nP}(s)$ i $s = 1$. Om vi evaluerar $S_{\text{Kon}(P)}(s, t)$ i $s = 1$ får vi därmed den formella summan

$$S_{\text{Kon}(P)}(1, t) = S_{0P}(1) \cdot t^0 + S_P(1) \cdot t^1 + S_{2P}(1) \cdot t^2 + \dots$$

Denna summa har vi stött på tidigare.

Sats 7.1.9. *Låt P vara en gitterpolytop i $\mathbb{R}^d$. Då gäller att*

$$S_{\text{Kon}(P)}(1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_P(n) t^n = \text{Ehr}_P(t).$$

Bevis. Enligt Hjälpssats 7.1.8 har vi att

$$S_{\text{Kon}(P)}(1, t) = S_{0P}(1) \cdot t^0 + S_P(1) \cdot t^1 + S_{2P}(1) \cdot t^2 + \dots$$

Eftersom $S_{nP}(1)$ är lika med antalet gitterpunkter i nP som i sin tur är lika med $L_P(n)$ följer satsen. $\square$

I detta kapitel kommer vi börja föra samman det vi studerat tidigare. Vi börjar med att introducera konen över en polytop P som kommer beskriva alla förstoringar av P samtidigt. Speciellt kommer vi se att gitterpunkterna i konen är starkt förknippade med Ehrhartserien av P . Slutligen visar vi ett resultat som säger att Ehrhartserien kan skrivas som en kvot av två polynom. Detta kommer att spela en nyckelroll när vi i Kapitel 8 visar Ehrharts sats för gitterpolyedrar.

7.2 Att räkna samma sak på två olika sätt

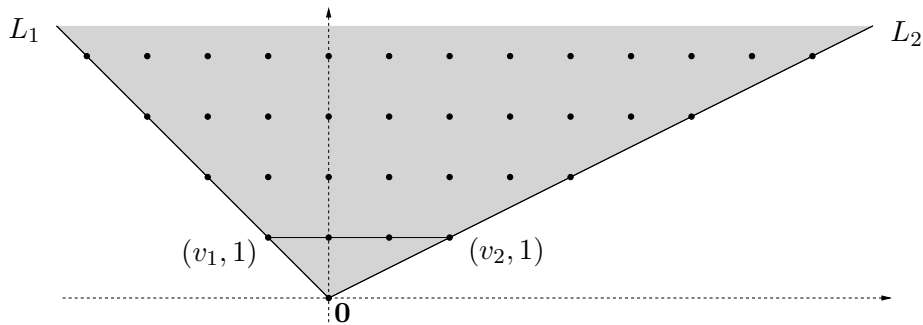
Med hjälp av den formella summan $S_{\text{Kon}(P)}(s, t)$ kan vi nu göra det som vi förklarade att vi ville göra i början av detta kapitel, nämligen att räkna gitterpunkterna i konen över en gitterpolytop P på ett annat sätt än höjdviss. Vi börjar med att bestämma mängden av gitterpunkter i $\text{Kon}(P)$ i fallet då P är ett linjesegment. Notera att konen $\text{Kon}(v)$ över en punkt $v \in \mathbb{R}$ är lika med linjen från origo som går igenom punkten $(v, 1)$.

Hjälpssats 7.2.1. *Låt $P = \mathbf{K}(v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^1$ vara ett linjesegment. Då kan varje gitterpunkt $\mathbf{x}$ i konen $\text{Kon}(P)$ på ett unikt sätt skrivas som*

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$$

där $\mathbf{p}$ är en gitterpunkt i $Q = \{r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2 < 1\}$, $\mathbf{x}_1$ är en gitterpunkt i $L_1 = \text{Kon}(v_1)$ och $\mathbf{x}_2$ är en gitterpunkt i $L_2 = \text{Kon}(v_2)$.

Då beviset av denna sats inte förklarar den geometriska tanken bakom påståendet så väljer vi först att förklara vad vi kommer göra. Betrakta därför följande exempel:

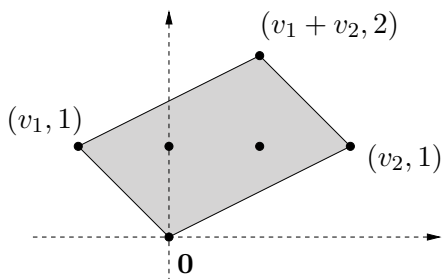


Figur 7.1: Konen över $P = \text{Konv}(v_1, v_2)$.

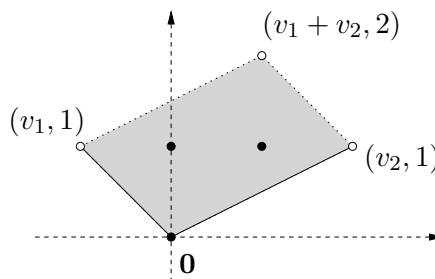
I denna figur är $v_1 = -1$ och $v_2 = 2$ men resonemanget gäller i allmänhet. Låt oss först studera, istället för mängden Q , mängden

$$R = \{r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2 \leq 1\}$$

där vi i olikheten $0 \leq r_1, r_2 < 1$ även tillåter att $r_1, r_2 = 1$. Eftersom varje punkt i R är en summa av en punkt på linjesegmentet mellan $\mathbf{0}$ och $(v_1, 1)$ och en punkt på linjesegmentet mellan $\mathbf{0}$ och $(v_2, 1)$ så följer det att R är parallelogrammen med hörn i $(0, 0)$, $(v_1, 1)$, $(v_2, 1)$ och $(v_1 + v_2, 2)$. Skillnaden mellan Q och R är att punkter $r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1)$ med r_1 eller r_2 lika med 1 ligger i R men inte i Q . Det betyder att Q är parallelogrammen R utan de hörn och kanter som utgör "taket" av R enligt nedan.



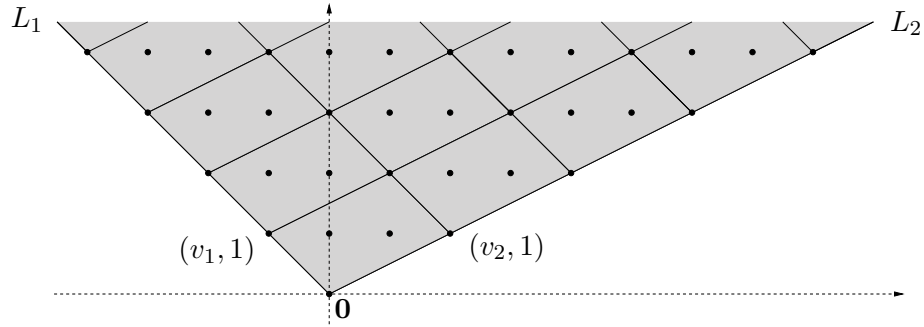
Figur 7.2: Parallelogrammen R med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(v_1, 1)$, $(v_2, 1)$ och $(v_1 + v_2, 2)$



Figur 7.3: Mängden Q , där de streckade kanterna och ihåliga hörnen ej är med i mängden

Anmärkning 7.2.2. Ordet *parallelogram* är "undantaget som bekräftar regeln" vad gäller svensk grammatik. Det heter *en* parallelogram så i singular bestämd form blir det "Den här parallelogrammen". I plural blir det "Flera parallelogrammer" och i bestämd form "De där parallelogrammerna".

Från följande figur ser vi att oändligt många kopior av parallelogrammen R täcker hela konen över P om vi placerar dessa som nedan.

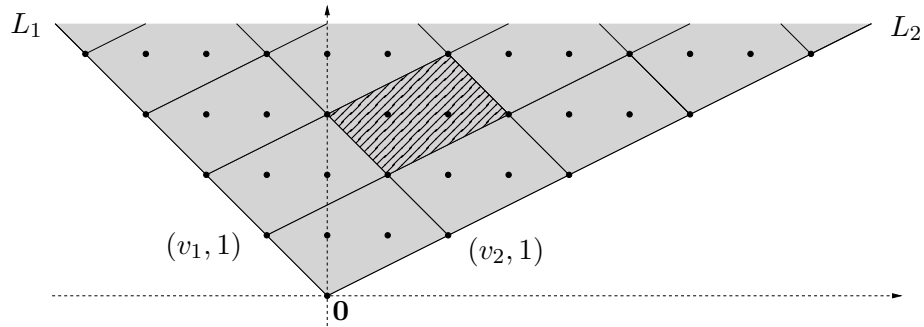


Figur 7.4: Kopior av parallelogrammen R täcker konen över P

I Övning 7.7 visas att varje gitterpunkt $\mathbf{x}_1$ på linjen $L_1 = \text{Kon}(v_1)$ är på formen $\mathbf{x}_1 = n_1(v_1, 1)$ för något $n_1 \in \mathbb{N}$. På samma sätt är varje gitterpunkt $\mathbf{x}_2$ i $L_2 = \text{Kon}(v_2)$ på formen $\mathbf{x}_2 = n_2(v_2, 1)$ för något $n_2 \in \mathbb{N}$. Man kan också visa att en gitterpunkt på formen

$$\mathbf{p} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1),$$

där $\mathbf{p}$ är en gitterpunkt i R är precis punkten $\mathbf{p}$ fast i en förflyttad kopia av R . Vidare bestämmer varje val av talen n_1 och n_2 en unik kopia av R och vice versa. I konen vi ritat är $v_1 = -1$ och $v_2 = 2$ och om till exempel $n_1 = 1$ och $n_2 = 1$ så är $n_1 \cdot (v_1, 1) + n_2 \cdot (v_2, 1) = 1 \cdot (-1, 1) + 1 \cdot (2, 1) = (1, 2)$ vilket motsvarar den markerade parallelogrammen nedan.



Vi kan därmed räkna upp alla gitterpunkter i konen över P genom att räkna antalet gitterpunkter i varje kopia av R . Det enda problemet är att vi då skulle dubbelräkna de gitterpunkter som ligger på randen av minst två kopior av R . Tar vi bort delar av randen av R så att dubbelräkning inte uppstår erhåller vi mängden Q . Låt oss nu bevisa detta.

Bevis av Hjälpsats 7.2.1. Vi börjar med att notera att vi från Övning 7.7 kan skriva $\mathbf{x}_1 = n_1(v_1, 1)$ och $\mathbf{x}_2 = n_2(v_2, 1)$ för $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

Vi visar nu satsen i två steg. Först visar vi att varje gitterpunkt $\mathbf{x}$ i konen kan skrivas på formen $\mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$. Sedan måste vi visa att varje punkt på formen $\mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$ faktiskt är en gitterpunkt i konen över P .

Tag en gitterpunkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i konen $\text{Kon}(P)$. Då är

$$(x_1, x_2) = k_1(v_1, 1) + k_2(v_2, 1)$$

för ett unikt val av reella tal $k_1, k_2 \geq 0$. Eftersom k_1 är ett reellt tal kan vi dela upp det i dess heltalsdel n_1 och dess decimaltalsdel $0 \leq r_1 < 1$ så att

$$k_1 = n_1 + r_1.$$

Till exempel är $5.27 = 5 + 0.27$. På samma sätt är $k_2 = n_2 + r_2$, där $n_2 \in \mathbb{N}$ och $0 \leq r_2 < 1$. Vi kan nu skriva

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = (x_1, x_2) &= k_1(v_1, 1) + k_2(v_2, 1) = (n_1 + r_1)(v_1, 1) + (n_2 + r_2)(v_2, 1) = \\ &= (n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)) + (r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1)) = \mathbf{v} + \mathbf{p} \end{aligned}$$

där vi infört notationen $\mathbf{v} = n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$ och $\mathbf{p} = r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1)$. Vi ser att $\mathbf{v}$ är en gitterpunkt då dess koordinater är summor av produkter av heltal. Vidare har vi att punkten $\mathbf{p} = r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1)$ per definition är en punkt i mängden Q . Då $\mathbf{p}$ är en differens av två gitterpunkter, $\mathbf{p} = \mathbf{x} - \mathbf{v}$, så följer det även att $\mathbf{p}$ är en gitterpunkt. Därmed har vi att $\mathbf{p}$ är en gitterpunkt i Q . Således har vi visat att en godtycklig gitterpunkt $\mathbf{x}$ i konen över P kan skrivas på formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$$

där $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ och $\mathbf{p}$ är en gitterpunkt i Q .

Slutligen måste vi visa att varje element på formen $\mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$ verkligen ligger i konen också. Detta görs i Övning 7.9. $\square$

Sats 7.2.3. Låt $P = \mathbf{K}(v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^1$ vara ett linjesegment. Om $L_1 = \text{Kon}(v_1)$ och $L_2 = \text{Kon}(v_2)$ så gäller att

$$S_{\text{Kon}(P)}(s, t) = S_Q(s, t) \cdot S_{L_1}(s, t) \cdot S_{L_2}(s, t)$$

där $Q = \{r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2 < 1\}$.

Bevis. Eftersom det gäller att $s^{\mathbf{x}} \cdot s^{\mathbf{y}} = s^{\mathbf{x}+\mathbf{y}}$ och $t^m \cdot t^n = t^{m+n}$ så är detta enbart en omformulering av Hjälpsats 7.2.1. $\square$

Anmärkning 7.2.4. Man kan visa att metoden som används i beviset av Hjälpsats 7.2.1 fungerar i större generalitet. Genom att göra detta kan man se att det finns en motsvarighet till Sats 7.2.3 för trianglar i $\mathbb{R}^2$ där Q svarar mot en *parallelepiped*. På samma sätt finns en motsvarande sats för tetraedrar i $\mathbb{R}^3$. Den senare kommer vi behöva för att bevisa Ehrharts sats för gitterpolyedrar. Skillnaden mot Sats 7.2.3 är enbart att beviset blir beräkningstekniskt tyngre eftersom en tetraeder har fyra hörnpunkter i dimension tre till skillnad från ett linjesegment som har två hörnpunkter i dimension ett. Då själva idén bakom beviset är identiskt med beviset av Sats 7.2.3 har vi valt att placera beviset i Appendix A.2.

Sats 7.2.5. Låt T vara en tetraeder med hörnen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$. Om vi inför $L_i = \text{Kon}(\mathbf{v}_i)$ för $i = 1, 2, 3, 4$ så gäller att

$$S_{\text{Kon}(T)}(s, t) = S_Q(s, t) \cdot S_{L_1}(s, t) \cdot S_{L_2}(s, t) \cdot S_{L_3}(s, t) \cdot S_{L_4}(s, t)$$

där $Q = \{r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1\}$.

Bevis. Se Sats A.2.2. □

Sätter vi samman Sats 7.1.9 och Sats 7.2.5 får vi följande resultat som vi i Kapitel 8 kommer använda för att visa att Ehrhartfunktionen är ett polynom.

Följdsats 7.2.6. Låt T vara en tetraeder med hörn i $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$. Då gäller att

$$\text{Ehr}_T(t) = \frac{S_Q(1, t)}{(1 - t)^4},$$

där $Q = \{r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1\}$.

Bevis. Från Sats 7.1.9 har vi att $\text{Ehr}_T(t) = S_{\text{Kon}(T)}(1, t)$ och från Sats 7.2.5 har vi att

$$S_{\text{Kon}(T)}(s, t) = S_Q(s, t) \cdot S_{L_1}(s, t) \cdot S_{L_2}(s, t) \cdot S_{L_3}(s, t) \cdot S_{L_4}(s, t)$$

där $L_i = \text{Kon}(\mathbf{v}_i)$ för $i = 1, 2, 3, 4$. Vi noterar nu att det enligt Övning 7.7 gäller att

$$S_{L_i}(1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

för alla $i = 1, 2, 3, 4$. Enligt Exempel 5.1.10 får vi därmed att

$$\begin{aligned} \text{Ehr}_T(t) &= S_{\text{Kon}(T)}(1, t) = \\ &= S_Q(1, t) \cdot S_{L_1}(1, t) \cdot S_{L_2}(1, t) \cdot S_{L_3}(1, t) \cdot S_{L_4}(1, t) = \\ &= S_Q(1, t) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right)^4 = \frac{S_Q(1, t)}{(1 - t)^4}. \end{aligned} \quad \square$$

Övningar

Övning 7.1 (★). Låt $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{y} = (4, 5, 6)$. Vad är $s^{\mathbf{x}}$ respektive $s^{\mathbf{y}}$? Beräkna $s^{\mathbf{x}} \cdot s^{\mathbf{y}}$ och $S_{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}}(s)$.

Övning 7.2 (★★). Låt P vara triangeln $\mathbf{K}((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ och låt n vara ett positivt heltal. Visa att $S_{nP}(s)$ är summan av uttryck av typen $s^{(x_1, x_2)} = s_1^{x_1} s_2^{x_2}$ så att $x_1, x_2 \geq 0$ och $x_1 + x_2 \leq n$.

Övning 7.3 (★★). Följande uppgift visar en koppling mellan gitterpunkter i $\mathbb{Z}^3$ och monom i tre variabler.

- (i) Hur många gitterpunkter $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ så att $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ och $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ finns det?

- (ii) Hur många monom av grad som mest 2 finns det i variablerna s_1, s_2 och s_3 ? (Ett monom av grad n i variablerna s_1, s_2 och s_3 är ett uttryck på formen $s_1^{x_1} s_2^{x_2} s_3^{x_3}$ så att $x_1 + x_2 + x_3 = n$ och $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.)
- (iii) Hur många monom av grad som mest n finns det i variablerna s_1, s_2 och s_3 ?

Övning 7.4 (*). Låt K vara kubens från Exempel 6.2.2. Skriv ut termerna i summan $S_K(s)$.

Övning 7.5 (*). Vilken parallelogram motsvarar mängden

$$\{\mathbf{p} + 1 \cdot (v_1, 1) + 2 \cdot (v_2, 1) \mid \mathbf{p} \in Q\}$$

i Figur 7.4?

Övning 7.6 (**). Beskriv "taket" av R i Figur 7.4. Det vill säga, beskriv $R \setminus Q$ som en mängd.

Övning 7.7 (***). Tag en gitterpunkt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ med $d \geq 1$. Visa att gitterpunkterna i $\text{Kon}(\mathbf{v})$ är $(0\mathbf{v}, 0), (\mathbf{v}, 1), (2\mathbf{v}, 2), \dots$. Använd detta för att visa att

$$S_{\text{Kon}(\mathbf{v})}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^{n\mathbf{v}} t^n \quad \text{och} \quad S_{\text{Kon}(\mathbf{v})}(1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Övning 7.8 (***). Beräkna $S_Q(s, t)$ och $S_Q(1, t)$ där Q är mängden

$$Q = \{r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1\}$$

från Sats 7.2.5 i fallet då

$$T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Övning 7.9 (***). Gör klart beviset av Hjälpssats 7.2.1. Det vill säga, visa att varje punkt på formen $\mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$, där $\mathbf{p}$ är en gitterpunkt i Q och $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, ligger i konen $\text{Kon}(P)$.

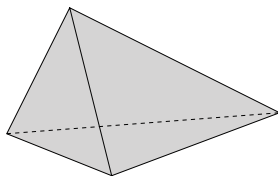
8 Allmän Ehrhartteori

I detta kompendiums sista kapitel är vi nu redo att visa Ehrharts sats för gitterpolyedrar. Vi börjar med att förklara trianguleringar av polyedrar, det vill säga tekniken att dela in en polyedrar i ett antal tetraedrar. Detta använder vi sedan för att visa Ehrharts sats. Det finns flera resultat som vi får som följd av denna sats och vi avslutar med att ge några exempel på sådana. Till exempel får vi en enkel formel för att beräkna volymen av en gitterpolyeder P i termer av antalet gitterpunkter i P , $2P$ och $3P$.

8.1 Trianguleringar av polyedrar

När vi i Kapitel 2 bevisade Hjälpssats 2.2.8 så använde vi att varje polygon kan trianguleras – det vill säga att varje polygon kan skrivas som en union av trianglar. Detta medförde att det räckte att visa påståendet för trianglar samt att påståendet var sant i skärningen av två trianglar. Denna metod är i själva verket en vanlig strategi för att bevisa mer involverade satser i matematik. Först visar man att komplicerade objekt kan byggas upp av enklare objekt. Därefter visar man det resultat man vill bevisa är giltigt för de enklare objekten. Slutligen bevisar man att om resultatet är sant för de enklare objekten så är det också sant när objekten sätts samman.

Motsvarigheten i tre dimensioner till att dela in en polygon i trianglar är att dela in en polyeder i tetraedrar.



På grund av analogin i dimension två kallas även en uppdelning av en polyeder P i tetraedrar för en triangulering av P . En stor skillnad mellan två och tre dimensioner är att beviset för att det är möjligt att triangulera alla polyedrar är avsevärt mycket mer komplicerat än beviset för att det går att triangulera alla polygoner. För en polygon så kunde vi välja ett hörn och dra linjer från det hörnet till alla andra hörn för att konstruera trianguleringen. En liknande metod finns för polyedrar som vi förklarar nedan men att visa att detta alltid fungerar är omständligt och lämnas till Appendix A.3.

Vi börjar med att rigoröst definiera vad en triangulering är i dimension tre.

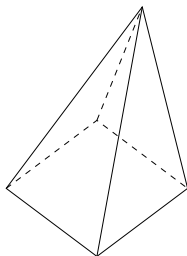
Definition 8.1.1. Låt P vara en polyeder. Vi säger att en ändlig mängd $\Delta = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ av tetraedrar är en *triangulering* av P om mängden Δ har följande två egenskaper:

- (i) $P = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$,
- (ii) För varje par av distinkta tetraedrar $T_1, T_2 \in \Delta$ är skärningen $T_1 \cap T_2$ en sida av både T_1 och T_2 .

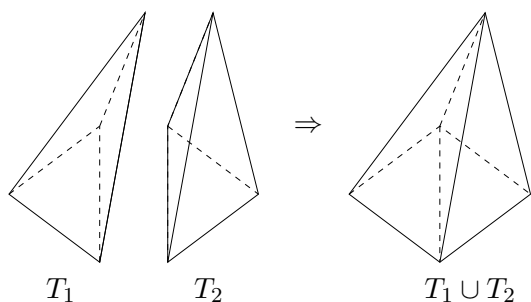
Ovanstående definition kan kanske vid första anblicken verka lite krånglig. Det den beskriver är en uppdelning av polyedern P i tetraedrar. I det första villkoret kräver vi att tetraederna verkligen fyller upp hela P och i det andra villkoret kräver vi att tetraederna inte överlappar med varandra.

Anmärkning 8.1.2. Den rigorösa definitionen för en triangulering av en polygon är identisk med ovanstående om man byter ut tetraedrar mot trianglar. Läsaren uppmuntras att försäkra sig om att trianguleringen i beviset av Hjälpssats 2.2.8 uppfyller denna definition.

Exempel 8.1.3. Betrakta följande pyramid.

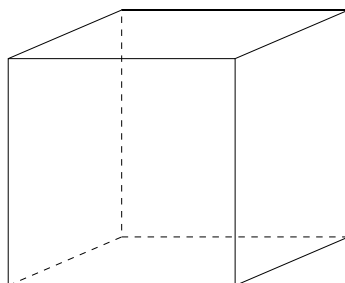


Denna polyeder kan trianguleras genom de två tetraederna som sätts samman som nedan.

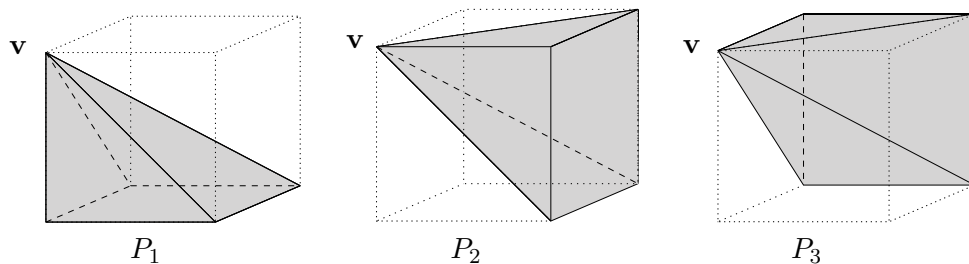


För att undersöka om denna triangulering är korrekt så behöver vi kontrollera att de båda kriterierna i Definition 8.1.1 är uppfyllda. Det första villkoret är uppfyllt eftersom unionen $T_1 \cup T_2$ av de båda tetraedrar T_1 och T_2 utgör hela pyramiden P . Vidare är det andra villkoret uppfyllt eftersom skärningen $T_1 \cap T_2$ är en triangel som är en sida i både T_1 och T_2 . ▲

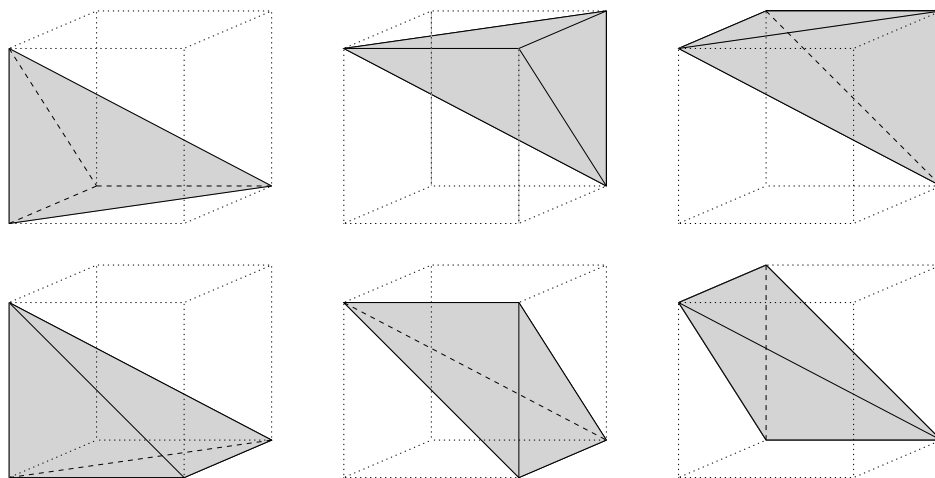
Exempel 8.1.4. Låt oss nu triangulera följande kub.



För att göra det börjar vi med att dela in kuben i tre stycken pyramider. Detta görs genom att välja ett hörn $\mathbf{v}$ och dra linjer från $\mathbf{v}$ till alla andra hörn i kuben. Detta delar in kuben i tre stycken pyramider P_1 , P_2 och P_3 .



Vi triangulerar nu vardera pyramid på samma sätt som i Exempel 8.1.3, vilket ger en fullständig triangulering av kuben.



Vi påstår alltså att den resulterande uppdelningen av kuben i tetraedrar är en triangulering. För att kontrollera det behöver vi återigen kontrollera de båda villkoren i Definition 8.1.1. Vi kan se att det första villkoret är uppfyllt eftersom dessa tetraedrar fyller hela kuben. För att kontrollera det andra villkoret behöver vi kontrollera att alla tetraedrar från olika pyramider skär varandra i en sida. Det finns 15 olika sådana par av tetraedrar och vi uppmanar läsaren att själv kontrollera att alla skärningar är på rätt form. ▲

En bra egenskap hos trianguleringarna i Exempen 8.1.3 och 8.1.4 är att varje hörn av en tetraeder i trianguleringen också är ett hörn av polyedern. Nästa sats säger att *varje* polyeder P kan trianguleras så att alla hörn i trianguleringen också är hörn i P . Idén bakom beviset är att generalisera hur vi använde trianguleringen i Exempel 8.1.3 för att triangulera kuben i Exempel 8.1.4. Vi delar alltså först upp vår polyeder i pyramider och visar sedan att pyramiderna kan trianguleras individuellt på ett sätt som också ger en triangulering av hela polyedern. Eftersom beviset av satsen är förvånansvärt omständligt medan påståendet med Exempel 8.1.4 i bakhuvudet förhoppningsvis är geometriskt rimligt har vi valt att förlägga beviset till appendix.

Sats 8.1.5. För varje polyeder P finns det en triangulering Δ av P så att för varje tetraeder $T \in \Delta$ är hörnen av T också hörn i P .

Bevis. Se Sats A.3.5. □

8.2 Ehrharts sats

Nu är vi redo att visa Ehrharts sats. Vi börjar med att visa satsen enbart för tetraedrar.

Hjälpssats 8.2.1. Låt T vara en tetraeder med hörn i gitterpunkter. Då är Ehrhartfunktionen $L_T(n)$ ett polynom i n av grad som mest 3.

Bevis. Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ vara hörnen i T och betrakta Ehrhartserien

$$\text{Ehr}_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_T(n)t^n$$

till T . Från Följdsats 7.2.6 har vi att

$$\text{Ehr}_T(t) = \frac{S_Q(1, t)}{(1 - t)^4}$$

där $Q = \{r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1\}$.

Eftersom Q består av ändligt många gitterpunkter så är $S_Q(1, t)$ en ändlig summa och speciellt är $S_Q(1, t)$ ett polynom i t vars grad är lika med den maximala höjden av alla gitterpunkter i Q . Höjden av en punkt

$$r_1(\mathbf{x}_1, 1) + r_2(\mathbf{x}_2, 1) + r_3(\mathbf{x}_3, 1) + r_4(\mathbf{x}_4, 1)$$

i Q ges av punktens sista koordinat som är $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ med $0 \leq r_i < 1$ för $i = 1, 2, 3, 4$. Eftersom $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 < 4$ är den maximala höjden av alla gitterpunkter i Q som mest 3. Alltså har vi en likhet

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_T(n)t^n = \text{Ehr}_T(t) = \frac{S_Q(1, t)}{(1 - t)^4}$$

där $S_Q(1, t)$ är ett polynom av grad som mest tre. Från Sats 5.3.3 följer det därmed att även $L_T(n)$ är ett polynom av grad som mest tre. □

Sats 8.2.2 (Ehrharts sats). Låt P vara en gitterpolyeder. Då är Ehrhartfunktionen $L_P(n)$ av P ett polynom i n av grad som mest 3.

Bevis. Från Sats 8.1.5 vet vi att det finns en triangulering Δ av P . För varje $n \in \mathbb{N}$ så är då $n\Delta = \{nT \mid T \in \Delta\}$ en triangulering av uppförstoringen nP . Därmed kan vi räkna antalet gitterpunkter i nP genom att summera antalet gitterpunkter i uppförstoringarna nT för alla $T \in \Delta$. Detta kommer dock medföra att vi dubbelräknar de gitterpunkter som ligger i skärningen av minst två tetraedrar. Vi har därför att

$$L_P(n) = \sum_{T \in \Delta} L_T(n) - q(n)$$

där $q(n)$ är en korrektionsterm som kommer av dubbelräkningen. För varje par av tetraedrar $T_1, T_2 \in \Delta$ så är $T_1 \cap T_2$ en sida av både T_1 och T_2 . Således är varje icke-tom skärning $T_1 \cap T_2$ antingen ett hörn, en kant eller en triangel.

- (i) Om $T_1 \cap T_2$ är ett hörn så är $L_{T_1 \cap T_2}(n) = 1$.
- (ii) Om $T_1 \cap T_2$ är en kant som innehåller m stycken gitterpunkter så är $L_{T_1 \cap T_2}(n) = (m - 1)n + 1$, se Övning 6.6.
- (iii) Om $T_1 \cap T_2$ är en triangel så har vi från Sats 6.1.6 att

$$L_{T_1 \cap T_2}(n) = An^2 + \frac{r}{2}n + 1$$

där A är triangelns area i det tvådimensionella gitter som innehåller den och r är antalet gitterpunkter längs med triangelns rand.

Notera att alla dessa uttryck är polynom i n av grad mindre än 3. Eftersom $q(n)$ är en ändlig summa av termer på formen ovan är $q(n)$ ett polynom. Nu följer resultatet från Hjälpsats 8.2.1 eftersom varje term i högerledet i

$$L_P(n) = \sum_{T \in \Delta} L_T(n) - q(n)$$

är ett polynom av grad som mest 3 och en summa av sådana är ett polynom av grad som mest 3. □

Anmärkning 8.2.3. I fortsättningen så kommer vi kalla Ehrhartfunktionen $L_P(n)$ för *Ehrhartpolynomet* av en polyeder P . Vi kommer i Följdsats 8.3.5 se att Ehrhartpolynomet $L_P(n)$ alltid är ett polynom av grad *precis* 3.

Exempel 8.2.4. I Exempel 6.1.7 beräknade vi Ehrhartpolynomet för enhetskuben K till $L_K(n) = (n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ vilket är ett tredjegrads-polynom i n . ▲

Sats 8.2.5. Låt P vara en gitterpolyeder och låt $L_P(n) = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0$ vara dess Ehrhartpolynom. Då gäller att $a_0 = 1$.

Bevis. Se Övning 8.2. □

Exempel 8.2.6. Låt T vara tetraedern

$$T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

I Kapitel 6 visade vi att Ehrhartfunktionen till T gavs av

$$L_T(n) = \binom{3+n}{3} = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6}$$

genom att använda kombinatorik. Med hjälp av Ehrharts sats kan vi nu beräkna detta på ytterligare ett sätt. Den teknik vi presenterar här för att beräkna Ehrhartpolynomet är mer räknetung än metoden vi såg i Kapitel 6 men den har istället den stora fördelen att samma angreppssätt fungerar för alla gitterpolyedrar.

Ehrharts sats säger att $L_T(n) = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0$ för några koefficienter $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, och vi vill nu beräkna dessa tal. Från Sats 8.2.5 har vi att $a_0 = 1$. Genom att räkna efter ser vi att T innehåller 4 gitterpunkter så $L_T(1) = 4$. Detta ger oss följande ekvation:

$$\begin{aligned} 4 &= L_T(1) = a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + 1 \\ &\iff \\ a_1 &= 3 - a_2 - a_3, \end{aligned} \tag{8.1}$$

Genom att räkna antalet gitterpunkter i $2T$ ser vi vidare att

$$\begin{aligned} 10 &= L_T(2) = a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + 1 \\ &\iff \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 &= 9. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Använder vi (8.1) i (8.2) följer det att

$$\begin{aligned} 8a_3 + 4a_2 + 2(3 - a_2 - a_3) &= 9 \\ &\iff \\ a_2 &= \frac{1}{2}(3 - 6a_3) = \frac{3}{2} - 3a_3. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Från att räkna antalet gitterpunkter i $3T$ ser vi att

$$\begin{aligned} 20 &= L_T(3) = a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + 1 \\ &\iff \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 &= 19. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Genom att substituera in (8.1) och (8.3) i (8.4) fås att $a_3 = \frac{1}{6}$, vilket i sin tur ger att $a_2 = 1$ och $a_1 = \frac{11}{6}$, se Övning 8.3. Sammanfattningsvis har vi

$$L_T(n) = \frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1 = \binom{3+n}{3}. \quad \blacktriangle$$

Man kan visa att tillvägagångssättet i Exempel 8.2.6 fungerar för alla gitterpolyedrar P . Ett sätt att göra det är att visa att ekvationerna som motsvarar ekvationerna (8.1)–(8.4) för en gitterpolyeder P , det vill säga ekvationssystemet

$$\begin{cases} L_P(1) = a_3 + a_2 + a_1 + 1, \\ L_P(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1, \\ L_P(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1, \end{cases}$$

alltid har en unik lösning. En teknik för att lösa linjära ekvationssystem som detta kallas för Gausselimination och är något man lär sig i *linjär algebra*. Vi refererar den intresserade läsaren till böcker i detta ämne, exempelvis kompendiet *Linjär Algebra - Tio förrätter och två efterrätter* som används i kursen Linjär algebra för gymnasister på KTH. Att lösa detta ekvationssystem ger följande resultat, vars bevis vi lämnar åt läsaren.

Sats 8.2.7. Låt P vara en gitterpolyeder med Ehrhartpolynom

$$L_P(n) = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0.$$

Då är

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= \frac{1}{3}L_P(3) - \frac{3}{2}L_P(2) + 3L_P(1) - \frac{11}{6}, \\ a_2 &= -\frac{1}{2}L_P(3) + 2L_P(2) - \frac{5}{2}L_P(1) + 1, \\ a_3 &= \frac{1}{6}L_P(3) - \frac{1}{2}L_P(2) + \frac{1}{2}L_P(1) - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

8.3 Geometrin hos Ehrhartpolynomet

Vi har nu visat att funktionen som räknar antalet gitterpunkter i en gitterpolyeder ges av ett polynom och vi har i Sats 8.2.7 gett explicita uttryck för koefficienterna i polynomet. Dessa koefficienter är inte bara tal utan har även geometriska tolkningar. Vi börjar med att påminna oss om strukturen av Ehrhartpolynomet för en gitterpolygon i två dimensioner.

Exempel 8.3.1. För en gitterpolygon P har vi enligt Sats 6.1.6 att Ehrhartpolynomet har formen

$$L_P(n) = a_2n^2 + a_1n + 1$$

där a_2 är lika med arean av P och a_1 är hälften av antalet gitterpunkter på randen av P . ▲

Precis som för gitterpolygoner så reflekterar koefficienterna i Ehrhartpolynomet av en gitterpolyeder geometriska egenskaper hos polyedern.

Exempel 8.3.2. Låt oss återigen studera enhetskuben och tetraedern.

- (i) I Exempel 6.1.7 såg vi att Ehrhartpolynomet för enhetskuben K var lika med $L_K(n) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, så i detta fall var $a_3 = 1$, $a_2 = 3$ och $a_1 = 3$. Vi noterar att volymen för enhetskuben ges av $1^3 = 1$ vilket är precis lika med a_3 .
- (ii) Från Följdsats 6.1.10 har vi att tetraedern T med hörn i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$ har Ehrhartpolynomet $L_T(n) = \frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1$, så $a_3 = \frac{1}{6}$. Man kan visa att volymen för tetraedern är precis $\frac{1}{6}$, vilket är lika med koefficienten a_3 . ▲

Anmärkning 8.3.3. Vi vill nedan visa att koefficienten a_3 i Ehrhartpolynomet för en gitterpolyeder P är precis lika med volymen av P . För att göra detta behöver vi egentligen en ordentlig definition för volymen av en tredimensionell kropp, vilket vi inte har. Av utrymmesskäl utelämnar vi denna teori, men ger en motiverande förklaring istället. Vi ber om läsarens överseende. Ett sätt att

beräkna volymen av ett objekt är att dela in objektet i mindre och enklare bitar och sedan addera volymerna av dessa. Varje tredimensionell kropp kan approximeras med en union av flera små kuber och ju mindre kuberna är desto bättre blir approximationen. Därmed fås en approximation av hela kroppens volym genom att summera kubernas volymer. Man kan visa att när man låter sidlängden av kuberna gå mot 0, och därmed låter antalet kuber gå mot oändligheten, så kommer approximationen av volymen att bli godtyckligt bra. Denna teori går igenom i grundkurser i analys, och den intresserade läsaren kan läsa om detta i exempelvis Persson och Böiers bok *Analys i flera variabler* (som har boken *Analys i en variabel* som förkunskapskrav). Nedan kommer vi använda att volymen av en tredimensionell kropp kan approximeras godtyckligt bra genom beskrivningen vi förklarade ovan.

Låt oss nu undersöka relationen mellan koefficienten a_3 i Ehrhartpolynomet och volymen av en gitterpolyeder P . Vi börjar med att ta ett positivt heltal n och låta $(\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3$ beteckna alla punkter i $\mathbb{R}^3$ vars koordinater har formen

$$\left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}\right)$$

för några heltal $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$. Om $n = 1$ så får vi det vanliga gittret och om $n > 1$ blir $(\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3$ ett tätare rutnät än det vi ser i det vanliga gittret. För varje punkt $\mathbf{x}$ i mängden $P \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3$ kan vi skapa en kub med mittpunkt i $\mathbf{x}$ och med sidlängd $\frac{1}{n}$. Denna samling av kuber kommer ge en approximation av polyedern P och vi kan från dessa approximera volymen av P . Om vi väljer n att vara stor så kommer sidlängden av kuberna att bli liten och skillnaden mellan volymen av P och den sammanlagda volymen av kuberna bli mindre. Antalet kuber är lika med antalet punkter i $P \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3$ och vi betecknar detta antal med $\left|P \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3\right|$. Då varje kub har volymen $\frac{1}{n^3}$ blir därför kubernas sammanlagda volym lika med

$$\frac{1}{n^3} \cdot \left|P \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3\right| \approx \text{Vol}(P).$$

Vi observerar nu att $(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}) \in P \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3$ om och endast om (x_1, x_2, x_3) är en gitterpunkt i nP . Detta är sant eftersom man kan tolka nP som mängden av punkter (x_1, x_2, x_3) så att $(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}) \in P$. Därför måste det gälla att $\left|P \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3\right| = L_P(n)$ så det följer att

$$\text{Vol}(P) \approx \frac{1}{n^3} L_P(n)$$

där approximationen kan fås godtyckligt bra genom att välja större och större n . Enligt Ehrharts sats vet vi att $L_P(n) = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ för några konstanter a_0, a_1, a_2 och a_3 . Därmed fås att

$$\begin{aligned} \text{Vol}(P) &\approx \frac{1}{n^3} (a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0) = a_3 \frac{n^3}{n^3} + a_2 \frac{n^2}{n^3} + a_1 \frac{n}{n^3} + a_0 \frac{1}{n^3} \\ &= a_3 + a_2 \frac{1}{n} + a_1 \frac{1}{n^2} + a_0 \frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

Om vi nu låter n bli större och större så kommer värdet av $a_2 \frac{1}{n} + a_1 \frac{1}{n^2} + a_0 \frac{1}{n^3}$ bli närmare och närmare noll samtidigt som approximationen med volymen blir mer och mer exakt. Med andra ord, när n blir större så kommer a_3 vara en bättre och bättre approximation av kubernas totala volym samtidigt som kubernas totala volym blir en bättre och bättre approximation av volymen av P . Eftersom vi kan göra n godtyckligt stort så drar vi följande slutsats.

Sats 8.3.4. *Låt P vara en gitterpolyeder med Ehrhartpolynom*

$$L_P(n) = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0.$$

Då är a_3 lika med volymen av P .

Följdsats 8.3.5. *Låt P vara en gitterpolyeder. Då är Ehrhartpolynomet $L_P(t)$ ett polynom av grad precis 3.*

Bevis. Eftersom volymen av en polyeder är större än 0 så följer det att $a_3 > 0$ vilket implicerar att $L_P(n)$ är ett tredjegradspolynom. $\square$

Vi har nu sett att $a_3 = \text{Vol}(P)$. Man kan till och med visa följande: Om P är en gitterpolyeder med Ehrhartpolynom $L_P(n) = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ så gäller att

- (i) a_3 är lika med volymen av P ,
- (ii) a_2 är lika med hälften av arean av fasetterna av P mätt i de tvådimensionella gitter som innehåller dem,
- (iii) $a_1 = ?$,
- (iv) $a_0 = 1$.

Notera här att ingen har hittat en bra geometrisk förklaring av koefficienten a_1 i Ehrhartpolynomet och matematiker håller än idag på och forskar i ämnet.

Som en avslutning på teorin om Ehrhartpolynomet kan vi med Sats 8.2.7 och Sats 8.3.4 ge en formel för volymen av en gitterpolyeder som enbart beror på antalet gitterpunkter hos polyedern och två av dess uppförstoringar.

Sats 8.3.6. *Låt P vara en gitterpolyeder. Då har vi att*

$$\text{Vol}(P) = \frac{L_P(3)}{6} - \frac{L_P(2)}{2} + \frac{L_P(1)}{2} - \frac{1}{6}.$$

Anmärkning 8.3.7. I Sats 6.1.6 visade vi att Ehrhartfunktionen av en gitterpolygon var lika med ett andragradspolynom och att arean av polygonen var lika med koefficienten framför högstagrads termen i samma polynom. För en gitterpolyeder har vi nu i Sats 8.2.2 visat att dess Ehrhartfunktion är ett tredjegradspolynom där högstagrads koefficienten svarar mot polyederns volym. Vi vill avsluta detta kompendium med att prata om Ehrharts sats i högre dimensioner. Först noterar vi att alla definitioner vi gjort har varit för godtyckliga

gitterpolytober i godtyckliga dimensioner, såsom Ehrhartfunktionen och konen över en polytop. Det visar sig att Ehrhartfunktionen till en d -dimensionell gitterpolytop ges av ett polynom av grad d vars höstgradskoefficient svarar mot polytopens d -dimensionella volym. Man skulle kunna tro att detta bevis är väldigt krångligt, men vi har nästan fullgjort beviset för detta redan. Alla satser vi visat för polyedrar kan generaliseras till godtyckliga polytober, och beviset av denna generalisering går i praktiken ut på att byta ut siffran 3 mot talet d . Dock måste man visa att d -dimensionella polytober kan trianguleras vilket är tekniskt och svårt att visualisera. Läsaren uppmuntras dock att gå igenom satserna vi gett om polyedrar och försöka se om beviset håller med 3 utbytt mot d istället. Detta är en av krafterna i abstrakt matematik. Genom att visa påståenden för saker man kan visualisera kan man på köpet även visa dem för svårare objekt även om man inte ens kan tänka på, eller förstå, dem.

8.4 Att räkna inre punkter

I detta kapitel har vi visat att funktionen

$$L_P(n) = \#\{nP \cap \mathbb{Z}^3\}$$

är ett tredjegradspolynom

$$L_P(n) = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + 1.$$

Eftersom att detta är just ett polynom kan vi stoppa in vilket reelt tal n som helst och fortfarande få ett väldefinierat uttryck. Därför är en naturlig fråga: *Vad får vi om vi stoppar in negativa tal i det här polynomet?*

Det visar sig att det finns ett mycket geometriskt svar på frågan. Låt oss börja med att betrakta fallet $d = 2$. I det fallet har vi visat (med hjälp av Pick's sats) att

$$L_P(n) = (i + \frac{r}{2} - 1)n^2 + \frac{r}{2}n + 1$$

där i är antalet inre gitterpunkter i P och r är antalet gitterpunkter på randen. Därmed är

$$L_P(-n) = (i + \frac{r}{2} - 1)n^2 - \frac{r}{2}n + 1 = L_P(n) - r \cdot n.$$

Eftersom att $r \cdot n$ är antalet gitterpunkter på randen till nP får vi alltså att $L_P(-n)$ är antalet inre gitterpunkter i nP . Vårt mål i denna sektion är att visa att en variant av detta påstående stämmer även för $d = 3$ (och även högre dimensioner). För att inte dra ut på detta allt för länge så kommer vi att skippa en hel del av de mer geometriska delarna av beviset. Närmare bestämt så kommer vi att ta följande påstående för givet.

Sats 8.4.1. *Låt P vara en gitterpolytop (i vilken dimension som helst)*

$$L_{\text{Inre}(P)}(n) = \text{antalet inre gitterpunkter i } nP$$

och beteckna den motsvarande genererande funktionen

$$\text{Ehr}_{\text{Inre}(P)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{\text{Inre}(P)}(n)t^n.$$

Då gäller att

$$\text{Ehr}_{\text{Inre}(P)}(t) = (-1)^{d+1} \text{Ehr}_P(t^{-1}).$$

Om någon läsare vill fördjupa sig inom detta kan vi nämna att påståendet ovan är en konsekvens av Stanleys reciprocitets-sats. Istället för ett allmänt bevis kan vi ge ett exempel för att försöka demonstrera idén bakom satsen.

Exempel 8.4.2. Låt T vara tetraedern

$$T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

Enligt Övning 6.3 består nT av punkter på formen

$$\lambda_1(0, 0, 0) + \lambda_2(1, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 0) + \lambda_4(0, 0, 1) = (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

så att $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ och $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = n$. Då $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ ej innehåller något λ_1 kan detta skrivas som $\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \leq n$. Dessutom gäller att $\text{Inre}(nT)$ ges av de punkter där $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ alla är > 0 . Därmed är $L_{\text{Inre}(P)}(n)$ antalet heltalslösningar till $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ där $x_i \geq 1$. Därmed är den genererande funktionen

$$\text{Ehr}_{\text{Inre}(T)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{\text{Inre}(T)}(n)t^n = (t + t^2 + t^3 + \dots)^4.$$

Vi har att

$$t + t^2 + t^3 \dots = t(1 + t^2 + t^3 + \dots) = \frac{t}{1-t}$$

så argumentet ovan ger att

$$\text{Ehr}_{\text{Inre}(T)}(t) = \frac{t^4}{(1-t)^4}.$$

Från Exempel 6.2.3 vet vi att

$$\text{Ehr}_T(t) = \frac{1}{(1-t)^4}$$

och därför gäller

$$\text{Ehr}_T(t^{-1}) = \frac{1}{(1-t^{-1})^4} = \frac{(-t)^4}{(1-t)^4} = (-1)^4 \text{Ehr}_{\text{Inre}(T)}(t)$$

▲

Hjälpsats 8.4.3. *Betrakta*

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))$$

som ett (grad $k-1$) polynom i variabeln n så att vi även kan stoppa in negativa värden för n . Då är

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Bevis. Vi har att

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{1}{k!}(-n) \cdot (-n-1) \cdot \dots \cdot (-n-(k-1)) \\ &= \frac{1}{k!} \cdot (-1)^k \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+(k-1)). \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}\end{aligned}$$

□

Hjälpsats 8.4.4. Låt $f(n)$ vara ett polynom av grad d och låt $F(t) = \sum_{n \geq 0} f(n)t^n$. Då är

$$F(t^{-1}) = - \sum_{n=1}^{\infty} f(-n)t^n.$$

Bevis. Enligt Sats 4.2.7 kan $f(n)$ skrivas som en summa av polynom på formen $\binom{d-k+n}{d}$. Därför räcker det att betrakta fallet $f(n) = \binom{d-k+n}{d}$ för något $0 \leq k < d$. I detta fall ger Hjälpsats 5.3.2 att

$$F(t) = \frac{t^k}{(1-t)^{d+1}}.$$

Därmed har vi

$$F(t^{-1}) = \frac{t^{-k}}{(1-t^{-1})^{d+1}} = (-1)^{d+1} \frac{t^{d+1-k}}{(1-t)^{d+1}} = (-1)^{d+1} t^{d+1-k} \cdot \frac{1}{(1-t)^{d+1}}.$$

Eftersom att

$$\frac{1}{(1-t)^{d+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} t^n$$

ger detta att

$$F(t^{-1}) = (-1)^{d+1} t^{d+1-k} \sum_{n \geq 0} \binom{d+n}{d} t^n = - \sum_{m \geq d+1-k} (-1)^d \binom{m+k-1}{d} t^m$$

där vi har gjort substitutionen $m = n + d + 1 - k$. Eftersom att $\binom{m+k-1}{d} = 0$ om $1 \leq m < d + 1 - k$ kan vi börja summan på 1 utan att det ändrar något, alltså

$$F(t^{-1}) = - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^d \binom{m+k-1}{d} t^m$$

Slutligen gäller

$$(-1)^d \binom{m+k-1}{d} = \binom{d-m-k}{d} = f(-m)$$

enligt Hjälpsats 8.4.3 vilket ger

$$F(t^{-1}) = - \sum_{m=1}^{\infty} f(-m)t^m.$$

□

Sats 8.4.5. Låt P vara en gitterpolyeder av dimension d och låt n vara ett positivt heltal. Då är

$$L_P(-n) = (-1)^d \cdot L_{\text{Inre}(P)}(n)$$

där $L_P(n)$ är antalet interna gitterpunkter i nP , det vill säga antalet punkter i nP som inte ligger på randen.

Bevis. Enligt Sats 8.4.1 är

$$\text{Ehr}_{\text{Inre}(P)}(t) = -\text{Ehr}_P(t^{-1}).$$

Eftersom att

$$\text{Ehr}_P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_P(n)t^n$$

där $L_P(n)$ är ett grad d polynom ger Hjälpsats 8.4.4 att

$$\text{Ehr}_{\text{Inre}(P)}(t) = -\text{Ehr}_P(t^{-1}) = (-1) \cdot (-1)^{d+1} \sum_{n=1}^{\infty} L_P(-n)t^n.$$

Därmed är

$$L_{\text{Inre}(P)}(n) = (-1)^d L_P(-n)$$

för alla $n \geq 1$. □

Övningar

Övning 8.1 (★). Kontrollera att mängden av tetraedrar i Exempel 8.1.4 är en triangulering. Det vill säga, kontrollera att varje icke-tom skärning av par av tetraedrar skär varandra i ett hörn, en kant eller en fasett.

Övning 8.2 (★★). Visa Sats 8.2.5.

Övning 8.3 (★). Gör klart beräkningarna för a_3, a_2, a_1 och a_0 i Exempel 8.2.6.

Övning 8.4 (★★). Använd Sats 8.3.6 för att visa att tetraedern

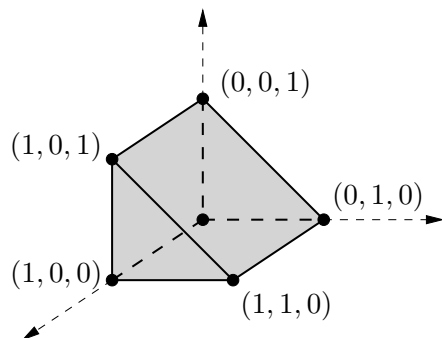
$$T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

har volym $\frac{1}{6}$.

Övning 8.5 (★). Använd metoden som beskrivs i Exempel 8.1.4 för att triangulera polyedern

$$P = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1))$$

som illustreras nedan.



Övning 8.6 (★★). Bestäm Ehrhartpolynomet och Ehrhartserien för polytopen P från Övning 8.5.

Övning 8.7 (★★★). Polyedern

$$P = \mathbf{K}((1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1))$$

är en pyramid.

- (i) Använd Övning 8.4 för att visa att P har volymen $\frac{4}{6}$.
- (ii) Beräkna $L_P(1)$, $L_P(2)$ och $L_P(3)$. (*Ledning:* Beräkna först $L_P(1)$ och $L_P(2)$. Använd därefter Sats 8.3.6.)
- (iii) Vad är Ehrhartpolynomet för pyramiden P ?

Övning 8.8 (★★). Bestäm hur många heltalslösningar det finns till följande olikheter (tillsammans)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 2x + 3y + z \leq 60 \end{cases}.$$

Övning 8.9 (★★★). I Anmärkning 8.3.7 påstod vi att Ehrhartfunktionen till en d -dimensionell gitterpolytop är ett polynom av grad d för alla positiva heltal d . Speciellt gäller det för $d = 1$. En endimensionell gitterpolytop är ett linjesegment mellan två gitterpunkter. Bevisa Ehrharts sats för en endimensionell gitterpolytop P i $\mathbb{R}^1$. Vad är den geometriska förklaringen av högstgradskoefficienten hos Ehrhartpolynomet för P ?

Övning 8.10 (★★★). Bevisa följande påståenden

- (i) Om P är en gitterpolyeder så har $4P$ minst en inre punkt.
- (ii) Om P är en gitterpolyeder sådan att $3P$ inte har några inre punkter då är $\text{Vol}(P) = \frac{1}{6}$.

Ledning: Enligt Sats 8.4.5 har nP inga inre punkter om och endast om $L_P(n) = 0$. Använd detta tillsammans med andra kunskaper du har om Ehrhartpolynom för att lista ut vad Ehrhartpolynomet måste vara för P om dessa egenskaper ska gälla. Följande fakta om polynom är viktiga att ha koll på för att lösa uppgiften.

- Om $f(x)$ är ett polynom av grad d med nollställena $a_1, \dots, a_d$ så är

$$f(x) = c \cdot (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_d)$$

där c är ett nollskillt tal. Detta gäller både för reella och komplexa tal.

- Om $f(x)$ är ett polynom av grad d kan f som mest ha d stycken olika nollställena.

Övning 8.11 (★★). I denna uppgift ska vi undersöka hur små gitterpolyedrar som minst kan bli och vilka egenskaper de minsta möjliga polyhedrarna har.

- Använd Sats 8.3.6 eller Övning 4.12 för att visa att volymen av en gitterpolyeder P alltid är en heltalsmultipel av $\frac{1}{6}$. Dra slutsatsen att om P är en gitterpolyeder så är $\text{Vol}(P) \geq \frac{1}{6}$.
- Använd det faktum att alla gitterpolyedrar har en triangulering för att visa att om $\text{Vol}(P) = \frac{1}{6}$ så är P en tetraeder och de enda gitterpunkterna som P innehåller är hörnen.
- Visa att Ehrhartpolynomet till P är

$$L_P(n) = \frac{1}{6}n^3 + 6n^2 + \frac{11}{6}n + 1$$

om $\text{Vol}(P) = \frac{1}{6}$.

Ledning: om $\text{Vol}(P) = \frac{1}{6}$ så är $a_3 = \frac{1}{6}$ så

$$L_P(n) = \frac{1}{6}n^3 + a_2n^2 + a_1n + 1$$

så endast a_2 och a_1 behöver bestämmas. För att hitta dessa använd del (ii) för att beräkna $L_P(1)$ och $L_P(-1)$. Använd sedan de resulterande ekvationerna för att bestämma a_1 och a_2 .

- Använd förra uppgiften för att konstatera att $\text{Vol}(P) = \frac{1}{6}$ om och endast om $3P$ inte har några inre punkter.

Övning 8.12 (★ ★ ★). Låt P vara en gitterpolyeder sådan att $2P$ inte har några inre punkter. Visa att antalet gitterpunkter i P är exakt $6 \text{Vol}(P) + 3$. Visa också att antalet inre punkter i $3P$ är $6 \text{Vol}(P) - 1$.

Lösningar till udda övningsuppgifter

Övning 1.1. (i) 0, 1, 2, 3, 4.

(ii) 1, 2, {2, 3}.

(iii) -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

(iv) 1, 2.

(v) -3, -2, -1, 1, 2, {2, 3}.

Övning 1.3. (i) B är en äkta delmängd av A .

(ii) A och B är lika.

(iii) Mängderna är disjunkta eftersom $B = \emptyset$ och alla mängder är disjunkta med den tomma mängden. B är en äkta delmängd till A .

(iv) Mängderna är varken disjunkta, lika eller äkta delmängder av varandra.

(v) Mängderna är disjunkta eftersom $A = \emptyset$.

Övning 1.5. Observera att dessa svar är förslag. Uppgifterna har flera korrekta svar.

(i) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2k \text{ för något heltal } k \geq 1\}$.

(ii) $\{p/2 \mid p \text{ är ett heltal}\}$.

(iii) $\{r \in \mathbb{R} \mid r \notin \mathbb{Q} \text{ och } |r| < 1\}$.

Övning 1.7. (i) Definitionsmängd: $\{1, 2, 3, \dots\}$. Målmängd: $\mathbb{N}$.

(ii) Definitionsmängd: $\{T \mid T \text{ är en triangel}\}$. Målmängd: $\mathbb{R}$.

(iii) Definitionsmängd: $\{p(x) \mid p(x) \text{ är ett andragradspolynom}\}$.
Målmängd: $\{p(x) \mid p(x) \text{ är ett förstegradspolynom}\}$.

Övning 1.9. (i) Detta är en funktion. Den är definierad för alla värden i definitionsmängden, den ger alltid samma värde för ett givet argument, och alla funktionsvärden ligger i målmängden.

(ii) Detta är inte en funktion, då funktionens värden inte ligger i målmängden ($f(2) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

(iii) Detta är inte en funktion, eftersom dess värden är slumpmässiga.

(iv) Detta är en funktion. Eftersom ordet Balkong börjar på B, så har funktionen ett definierat värde som ligger i målmängden.

Övning 1.11. (i) Funktionerna är lika. De har samma definitionsmängd, målmängd och $\sqrt{x^2} = |x|$ för alla x .

(ii) Funktionerna är inte lika, då deras definitionsmängder inte är samma.

(iii) Funktionerna är inte lika, då deras målmängder är olika.

Övning 1.13. Vi gör ett direkt bevis. Om $A \cap B = \emptyset$ betyder det att inga element i A tas bort i $A \setminus B$. Alltså har vi $A \cap B = \emptyset \implies A \setminus B = A$. På samma sätt har vi att om $A \setminus B = A$ betyder det att det inte finns några gemensamma element i A och B som tas bort i $A \setminus B$, alltså har vi $A \setminus B = A \implies A \cap B = \emptyset$.

Övning 1.15. Vi gör ett direkt bevis. Mängden $A \setminus B$ är mängden av element som ligger i A och inte i B . Alltså är det mängden vi får när vi 'tar bort elementen som ligger i B från A '. Alltså tar vi egentligen bara bort elementen som ligger i $A \cap B$ från A . De som inte låg i A från första början struntar vi alltså i.

Övning 1.17. Vi gör ett direkt bevis. Hur många par av element A respektive B finns det? Jo, exakt lika många som det finns sätt att välja ett element ur den ena och sedan den andra vilket är $(|A|) \cdot (|B|)$.

Övning 1.19. Om n är jämnt så finns det per definition ett heltal k så att $n = 2k$. Då gäller att $n + 1 = 2k + 1$, det vill säga $n + 1$ är udda.

Övning 1.21. Antag motsatsen, det vill säga att det finns ett rationellt tal p/q och ett irrationellt tal r vars summa är rationell. Skriv summan som kvoten s/t . Då gäller

$$\frac{p}{q} + r = \frac{s}{t} \implies r = \frac{s}{t} - \frac{p}{q} = \frac{sq - pt}{tq}$$

genom att skriva vänsterledet på gemensamt bråkstreck. Men detta bevisar att r är rationellt, vilket är en motsägelse.

Övning 1.23. Antag motsatsen till satsen. Den kan delas in i två fall. I det ena fallet gäller att $ab = c$ och $a < \sqrt{c}$ och $b < \sqrt{c}$. Då gäller att

$$ab < a\sqrt{c} < \sqrt{c}\sqrt{c} = \sqrt{c}^2 = c.$$

Alltså gäller $ab < c$, vilket är en motsägelse.

I det andra fallet gäller att $ab = c$ och $a > \sqrt{c}$ och $b > \sqrt{c}$. Då gäller att

$$ab > a\sqrt{c} > \sqrt{c}\sqrt{c} = \sqrt{c}^2 = c.$$

Alltså gäller $ab > c$, vilket är en motsägelse.

Övning 1.25. Låt $r = p/q$ vara ett rationellt tal. Genom att förlänga med $\sqrt{2}$ kan vi skriva

$$r = \sqrt{2} \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Vi vet att $\sqrt{2}$ är irrationellt. Om vi kunde visa att $r/\sqrt{2}$ är irrationellt så vore vi klara.

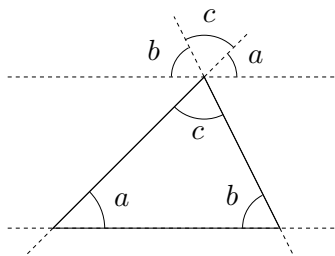
Antag motsatsen, det vill säga att $r/\sqrt{2}$ är en kvot av två heltal a och b . Genom algebraiska manipulationer får vi att

$$\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b} \implies \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{qa}{pb} \implies \sqrt{2} = \frac{pb}{qa}.$$

Men detta innebär att $\sqrt{2}$ är rationellt, vilket är en motsägelse. Alltså är $r/\sqrt{2}$ irrationellt, vilket avslutar vårt bevis.

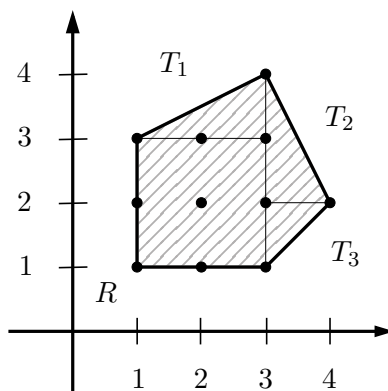
Övning 1.27. Vi visar att om en punkt $\mathbf{x} \in M$ inte är en inre punkt så måste $\mathbf{x}$ vara en randpunkt. Låt därför $\mathbf{x} \in M$ och antag att $\mathbf{x}$ inte är en inre punkt. Från definitionen av en inre punkt följer då att för varje cirkelskiva C med $\mathbf{x}$ som mittpunkt gäller att $C \not\subseteq M$. Det betyder att det finns punkter i C som inte ligger i M , det vill säga $C \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M) \neq \emptyset$. Eftersom $\mathbf{x} \in C$ och $\mathbf{x} \in M$ gäller också att $C \cap M \neq \emptyset$. Då detta gäller för alla cirkelskivor med $\mathbf{x}$ som mittpunkt så följer att $\mathbf{x}$ är en randpunkt.

Övning 1.29. Vi döper vinklarna i figuren enligt nedan. De vinklar som har samma namn är lika stora enligt den egenskap som refereras till i uppgiftslydelsen.



Högst upp i figuren ser vi att vinkeln $a + b + c$ är ett halvt varv, därför är $a + b + c = 180^\circ$.

Övning 2.1. Vi delar in polygonen från Exempel 2.2.1 i rektanglar och trianglar enligt nedan.

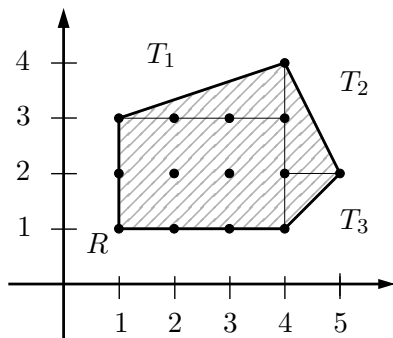


Rektangeln har area 4 medan

$$\text{Area}(T_1) = \text{Area}(T_2) = 1 \text{ och } \text{Area}(T_3) = \frac{1}{2}.$$

Därför har polygonen area lika med $4 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$.

Vi delar in polygonen från Exempel 2.2.2 i rektanglar och trianglar enligt nedan.



Rektangeln har area 6 medan

$$\text{Area}(T_1) = \frac{3}{2}, \text{Area}(T_2) = 1 \text{ och } \text{Area}(T_3) = \frac{1}{2}.$$

Därför har polygonen area lika med $6 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 9$.

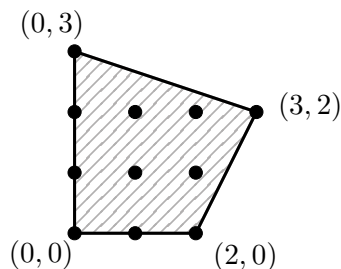
Övning 2.3. Om $\mathbf{x}$ är ett hörn i P så är vikten $v_P(\mathbf{x}) = \frac{\theta}{360^\circ}$ där θ är vinkeln i $\mathbf{x}$. Låt nu $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ vara hörnen i P . Då gäller att

$$v_P(\mathbf{x}_1) + v_P(\mathbf{x}_2) + \dots + v_P(\mathbf{x}_n) = \frac{\theta_1}{360^\circ} + \frac{\theta_2}{360^\circ} + \dots + \frac{\theta_n}{360^\circ} = \frac{\theta_1 + \dots + \theta_n}{360^\circ}$$

där θ_i är vinkeln i hörnet $\mathbf{x}_i$. Med ledtråden följer att $\theta_1 + \dots + \theta_n = 180^\circ \cdot (n-2)$ så

$$v_P(\mathbf{x}_1) + v_P(\mathbf{x}_2) + \dots + v_P(\mathbf{x}_n) = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{360^\circ} = \frac{n-2}{2}.$$

Övning 2.5. Då varje hörn är en multipel av $\sqrt{2}$ kan man tänka sig att polygonen är en gitterpolygon P som har skalats upp med faktorn $\sqrt{2}$. Om vi betraktar polygonen P innan uppskalningen måste P vara följande gitterpolygon



Vi noterar att P har 4 inre gitterpunkter och 7 stycken gitterpunkter på sin rand. Därmed har vi att $\text{Area}(P) = 4 + \frac{7}{2} - 1 = \frac{13}{2}$. När vi skalar upp P med faktorn $\sqrt{2}$ så kommer arean av P att öka med en faktor $(\sqrt{2})^2 = 2$. Därmed har vi att arean av den ursprungliga polygonen ges av

$$(\sqrt{2})^2 \text{Area}(P) = 2 \frac{13}{2} = 13.$$

Övning 2.7. Vi börjar med att införa lite notation. Kalla de båda konvexa polygonerna P_1 och P_2 och deras sammansättning för P . Låt i_1 och i_2 vara antalet inre gitterpunkter i P_1 respektive P_2 . På samma sätt låter vi r_1 och r_2 vara antalet gitterpunkter på randen av P_1 respektive P_2 . Vi låter också i vara antalet inre gitterpunkter i sammansättningen P och r att vara antalet gitterpunkter på randen till P .

Låt k vara antalet gitterpunkter som ligger på det linjesegment i vilken P_1 och P_2 har satts samman men som inte är randpunkter i P . Antalet inre punkter i P är då $i = i_1 + i_2 + k$. Vi ser också att antalet gitterpunkter på randen av P är lika med $r = r_1 + r_2 - 2k - 2$. Detta är sant eftersom hörnen på kanten i vilken P_1 och P_2 sätts samman är randpunkter i både P_1 och P_2 . Med detta i bakhuvudet gör vi nu följande beräkning med hjälp av Picks sats för P_1 och P_2 .

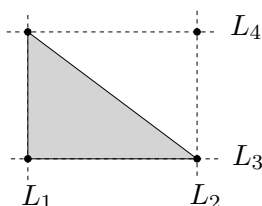
$$\begin{aligned} \text{Area}(P) &= \text{Area}(P_1) + \text{Area}(P_2) = i_1 + \frac{r_1}{2} - 1 + i_2 + \frac{r_2}{2} - 1 = \\ &= i_1 + i_2 + \frac{r_1 + r_2}{2} - 2 = i_1 + i_2 + \frac{r_1 + r_2}{2} - 2 + k - k = \\ &= \underbrace{i_1 + i_2 + k}_{=i} + \frac{r_1 + r_2}{2} - 2 - \frac{2k}{2} = i + \frac{r_1 + r_2 - 2k}{2} - 2 = \\ &= i + \frac{r_1 + r_2 - 2k}{2} - 1 - 1 = i + \frac{r_1 + r_2 - 2k}{2} - \frac{2}{2} - 1 = \\ &= i + \underbrace{\frac{r_1 + r_2 - 2k - 2}{2}}_{=r/2} - 1 = i + \frac{r}{2} - 1. \end{aligned}$$

Övning 2.9. Definiera rektangeln R på det sätt som beskrivs i ledningen. Vi noterar först att hörnen i R är punkterna

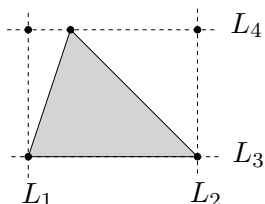
$$(x_1^{\min}, x_2^{\min}), (x_1^{\max}, x_2^{\min}), (x_1^{\min}, x_2^{\max}) \text{ och } (x_1^{\max}, x_2^{\max})$$

där $x_i^{\min}$ och $x_i^{\max}$ är den minsta respektive maximala x_i -koordinaten för hörnen i P för $i = 1, 2$. Eftersom P har tre hörn och samma hörn inte kan ha både det största och minsta värdet på x_i -koordinaten bland hörnen följer att åtminstone ett av hörnen i P måste ligga i ett hörn av triangeln. Vi får därför tre fall: Första fallet är att alla tre hörn i P också är hörn i R . Det andra fallet är att precis två av hörnen i P är hörn i R . Fall tre är att bara ett hörn i P är ett hörn i R .

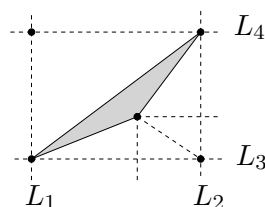
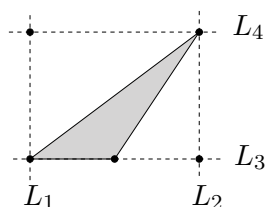
Om alla tre hörnen av P också är hörn i R kan vi, efter att eventuellt ha roterat P , anta att hörnen i P är $(x_1^{\min}, x_2^{\min})$, $(x_1^{\max}, x_2^{\min})$ och $(x_1^{\min}, x_2^{\max})$. Vi är därför i följande situation och ser från bilden att R är unionen av två rätvinkliga trianglar.



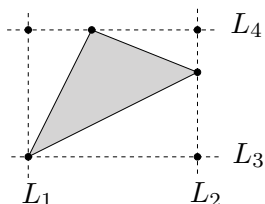
Om precis två hörn $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ i P också är hörn i R finns det två möjligheter. Antingen ligger $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ på samma kant i R eller så gör de inte det. Om $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ ligger på samma kant i R kan vi, efter att eventuellt ha roterat P , anta att hörnen är $\mathbf{v}_1 = (x_1^{min}, x_2^{min})$ och $\mathbf{v}_2 = (x_1^{max}, x_2^{min})$. Då måste det tredje hörnet i P ligga på linjen L_4 . Eftersom det tredje hörnet $\mathbf{v}_3$ i P *inte* var ett hörn av R så måste vi vara i följande situation. Vi ser från bilden att R är unionen av P och två rätvinkliga trianglar (notera att varje val av $\mathbf{v}_3$ på L_3 som inte är ett hörn av R ger en liknande struktur).



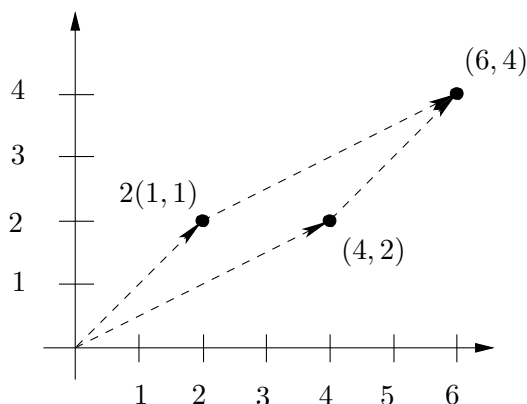
Om $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ inte ligger på samma kant i R kan vi anta att $\mathbf{v}_1 = (x_1^{min}, x_2^{min})$ och $\mathbf{v}_2 = (x_1^{max}, x_2^{max})$. Det finns nu två möjligheter. Antingen ligger det tredje hörnet $\mathbf{v}_3$ i P på en kant i R eller så gör det inte det. Vi får därför någon av följande två fall och ser från bilderna att R är unionen av P och två eller fem rätvinkliga trianglar (notera återigen att den precisa placeringen av $\mathbf{v}_3$ inte spelar någon roll för strukturen).



Det sista fallet är att endast ett av hörnen av P är ett hörn i R . Då kan vi anta att det hörnet är (x_1^{min}, x_2^{min}) . De två övriga hörnen måste då ha x_1 -koordinat lika med x_1^{max} respektive x_2 -koordinat lika med x_2^{max} . Om samma hörn skulle ha både x_1 -koordinat lika med x_1^{max} och x_2 -koordinat lika med x_2^{max} så skulle det hörnet också vara ett hörn i R vilket skulle betyda att vi är i det tidigare fallet där två hörn av P var hörn i R . Nu är dock bara ett hörn av P ett hörn av R . Därför måste ett hörn i P ligga på linjen L_2 och det andra hörnet ligga på linjen L_4 . Det betyder att vi är i följande situation och vi ser att R är unionen av P och tre rätvinkliga trianglar (de precisa placeringarna av de två hörnen är återigen oviktiga för strukturen).



Övning 3.1. (i) Vi har att $(4, 2) + 2(1, 1) = (4, 2) + (2, 2) = (6, 4)$. Den geometriska lösningen ges nedan:



(ii) Här gäller att

$$\begin{aligned}(1, 1, 1) - 3(2, 0, 1) + 4(0, 0, 1) &= (1, 1, 1) - (6, 0, 3) + (0, 0, 4) = \\ &= (1 - 6 + 0, 1 - 0 + 0, 1 - 3 + 4) = (-5, 1, 2).\end{aligned}$$

Övning 3.3. Vi visar att dessa två mängder är lika genom att visa att de är delmängder av varandra.

Tag en punkt $\mathbf{p} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Då är $\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n$ för några $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ med $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Om vi inför $\lambda_{n+1} = 0$ ser vi att

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n + \underbrace{\lambda_{n+1} \mathbf{x}}_{=0}$$

där $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \geq 0$ och

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n + 0 = 1.$$

Därmed har vi att $\mathbf{p} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x})$. Eftersom detta gäller för alla punkter $\mathbf{p}$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ följer det att

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}).$$

Vi vill nu visa att $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \subseteq \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Tag därför en punkt $\mathbf{p} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x})$. Då är

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n + \lambda_{n+1} \mathbf{x}$$

för några $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ med $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$. Då $\mathbf{x} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ så har vi att

$$\mathbf{x} = k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \dots + k_n \mathbf{x}_n$$

för några $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$ och $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1$. Därmed gäller att

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n + \lambda_{n+1} \mathbf{x} = \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n + \lambda_{n+1} (k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \dots + k_n \mathbf{x}_n) = \\ &= (\lambda_1 + \lambda_{n+1} k_1) \mathbf{x}_1 + (\lambda_2 + \lambda_{n+1} k_2) \mathbf{x}_2 + \dots + (\lambda_n + \lambda_{n+1} k_n) \mathbf{x}_n.\end{aligned}$$

Vi inför nu $\mu_i = \lambda_i + \lambda_{n+1}k_i$ för alla $i = 1, 2, \dots, n$. Då gäller att $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ och

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n &= \lambda_1 + \lambda_{n+1}k_1 + \lambda_2 + \lambda_{n+1}k_2 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1}k_n = \\ &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} \underbrace{(k_1 + \dots + k_n)}_{=1} = \\ &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1.\end{aligned}$$

Det betyder att $\mathbf{p} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Eftersom detta är sant för alla punkter i $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x})$ drar vi slutsatsen att

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \subseteq \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Vi har alltså visat att dessa mängder är delmängder av varandra vilket måste betyda att de är lika, det vill säga att

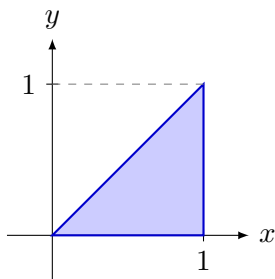
$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Övning 3.5. Vi visar att $\mathbf{K}((0,0), (1,0), (1,1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ genom att visa att mängderna är delmängder av varandra. Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{K}((0,0), (1,0), (1,1)) &= \\ \{\lambda_1(0,0) + \lambda_2(1,0) + \lambda_3(1,1) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\} &= \\ \{(\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_3) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}\end{aligned}$$

Låt $(x,y) \in \mathbf{K}((0,0), (1,0), (1,1))$. Då existerar det $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ där $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ sådana att $x = \lambda_2 + \lambda_3 = 1 - \lambda_1 \leq 1$ och $y = \lambda_3 \geq 0$. Det gäller alltså att $0 \leq y \leq x \leq 1$. Antag nu omvänt att $0 \leq y \leq x \leq 1$. Definiera $\lambda_2 = x - y$, $\lambda_3 = y$ och $\lambda_1 = 1 - x$. Då gäller direkt $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 - x + (x - y) + y = 1$. Olikheten för x och y ger $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$. Så $(x,y) \in \text{Konv}((0,0), (1,0), (1,1))$ och likheten är visad.

Området $0 \leq y \leq x \leq 1$ skissas nedan.



Övning 3.7. Låt $P_1 = \mathbf{K}((0,0), (1,0), (1,1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ och $P_2 = \mathbf{K}((0,0), (1,0), (1,1))$. Höljerna kan skrivas

$$\begin{aligned}P_1 &= \{(\lambda_2 + \lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_4, \lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_4) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1\}, \\ P_2 &= \{(\mu_2 + \mu_3, \mu_3) \mid \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1\}.\end{aligned}$$

Låt $(x, y) \in P_1$, så för $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ har vi $x = \lambda_2 + \lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_4$ och $y = \lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_4$. Definiera

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{2}\lambda_4 + \lambda_1 \\ \mu_2 = \lambda_2 \\ \mu_3 = \lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_4. \end{cases}$$

Då kan skriva $x = \mu_2 + \mu_3$ och $y = \mu_3$. Det är uppenbart att $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ och $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$. Detta betyder $(x, y) \in P_2$. Omvänt om $(x, y) \in P_2$ så gäller $x = \mu_2 + \mu_3, y = \mu_3$ för $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$ som uppfyller $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$. Sätt

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 \\ \lambda_2 = \mu_2 \\ \lambda_3 = \mu_3 \\ \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Då gäller $x = \lambda_2 + \lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_4$ och $y = \lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_4$. Uppenbarligen gäller också $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ och $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + 0 = 1$. Så $(x, y) \in P_1$.

Övning 3.9. Låt $k \geq 1$ och $x, y \in \mathbf{K}(x_1, \dots, x_k)$. Då kan vi skriva

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \\ y &= \sum_{i=1}^k \beta_i x_i \end{aligned}$$

där $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ för $i \in \{1, \dots, k\}$ uppfyller

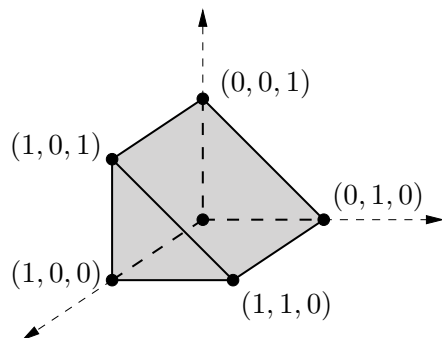
$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = \sum_{i=1}^k \beta_i = 1.$$

Låt dessutom $t \in [0, 1]$. Då gäller

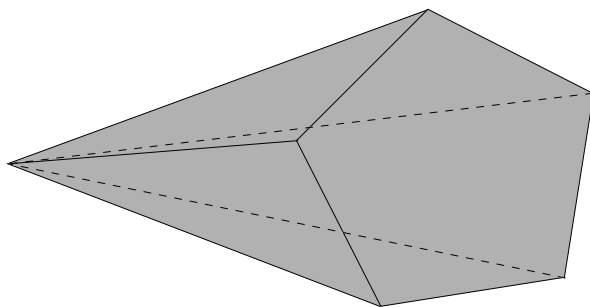
$$\begin{aligned} tx + (1-t)y &= t \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + (1-t) \sum_{i=1}^k \beta_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^k t\alpha_i x_i + \sum_{i=1}^k (1-t)\beta_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^k (t\alpha_i + (1-t)\beta_i) x_i. \end{aligned}$$

Notera att $t\alpha_i + (1-t)\beta_i \geq 0$ och $\sum_{i=1}^k t\alpha_i + (1-t)\beta_i = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$. Detta betyder att $tx + (1-t)y \in \mathbf{K}(x_1, \dots, x_k)$ så $\mathbf{K}(x_1, \dots, x_k)$ är en konvex mängd.

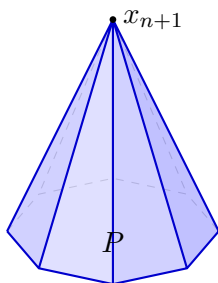
Övning 3.11. (i) Ett exempel på en polyeder vars fasetter utgörs av tre trapetser och två trianglar ges nedan.



- (ii) Varje kant i en polyeder ligger i precis två fasetter och inget par av fasetter delar fler än en kant. Låt F vara fasetten i P som är en pentagon. Då måste det finnas minst fem ytterligare fasetter i P som var och en delar en kant med F . Därför måste det minsta antal fasetter som P har vara åtminstone sex. Följande figur visar ett exempel på en sådan polyeder som bevisar att det finns en polyeder med sex fasetter varav en fasett är en pentagon.



Övning 3.13. Fasetterna är P och n trianglar som två intilliggande hörn i P bildar med x_{n+1} , se bild nedan.



Övning 3.15. Tag $\mathbf{x} \in P$. Då finns det $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5 \geq 0$ och $\lambda_1 + \dots + \lambda_5 = 1$ så att

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lambda_1(0, 0, 0, 0) + \lambda_2(1, 0, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 0, 0) + \lambda_4(0, 0, 1, 0) + \lambda_5(0, 0, 0, 1) = \\ &= (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5). \end{aligned}$$

Om $\mathbf{x}$ ska vara en gitterpunkt så måste $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ och λ_5 alltså vara heltal. Eftersom $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$ så ger sambandet $\lambda_1 + \dots + \lambda_5 = 1$ att $(0, 0, 0, 0)$,

$(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ och $(0, 0, 0, 1)$ är de enda gitterpunkterna $\mathbf{x}$ kan vara. Dessa är fem till antalet.

Övning 4.1. Vi har att

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 5 \cdot 4 = 20 < 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$$

Övning 4.3. Eftersom vi ska välja ut 3 siffror bland 10 stycken siffror är svaret

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120.$$

Övning 4.5. Att bland n stycken objekt välja ut k stycken är samma sak som att bland n objekt välja bort $n - k$ stycken objekt. Algebraisk kan man visa likheten på följande vis

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Övning 4.7. (i) Vi har att

$$p = x_1(0, 0, 0) + x_2(1, 0, 0) + x_3(0, 1, 0) + x_4(0, 0, 1) = (x_2, x_3, x_4)$$

så därmed är p en gitterpunkt om och endast om x_2, x_3, x_4 är heltal. I detta fall är även $x_1 = n - x_2 - x_3 - x_4$ ett heltal.

(ii) Varje punkt i T kan på ett unikt sätt skrivas på formen

$$p = x_1(0, 0, 0) + x_2(1, 0, 0) + x_3(0, 1, 0) + x_4(0, 0, 1)$$

där $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ och $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$. Del (i) ger att en punkt p är en gitterpunkt om och endast om alla x_i är heltal. Därmed är antalet gitterpunkter i T lika med antalet positiva heltalslösningar till

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n.$$

(iii) Enligt del (ii) i Uppgift 4.6 är antalet positiva heltalslösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$

$$\binom{3+n}{3}.$$

Därmed innehåller T $\binom{3+n}{3}$ olika gitterpunkter.

Övning 4.9. (i) Likheten säger att summan av två tal som står bredvid varandra på plats $k - 1$ och k i rad $n - 1$ är lika med talet som står på plats k i rad n . Exempelvis ser vi att talet under 4 och 6 i triangeln är 10 och att $4 + 6 = 10$.

- (ii) Om vi har n :st objekt kan vi numrera dessa $1, 2, \dots, n$. Ett "uppenbart" påstående är att om vi har valt k objekt från n stycken kommer objekt nummer n antingen att vara bland dom valda objekten eller så kommer det inte att vara det. Därmed är

antal sätt att välja ut k objekt av n

=

antal sätt att välja ut k objekt av n så att objekt nummer n är med

+

antal sätt att välja ut k objekt av n så att objekt nummer n *inte* är med.

Att välja k objekt av n så att objekt nummer n *inte* är med är samma sak som att välja ut k stycken av de första $n - 1$ objekten så det finns

$$\binom{n-1}{k}$$

sätt att gör det på.

Om vi istället ska välja k objekt av n så att objekt nummer n faktiskt är är med så har vi, utöver objekt n , $k - 1$ stycken objekt kvar att välja ut och eftersom att vi redan har valt objekt n så måste dessa väljas bland de första $n - 1$ objekten. Därmed finns det

$$\binom{n-1}{k-1}$$

sätt att gör det på. Detta ger därmed att

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Algebraiskt kan vi visa detta genom att förenkla högerledet tills det är lika med vänsterledet.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} = \\ &= \frac{(n-1)!k}{k(n-k)(k-1)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)(n-1-k)!k!} = \\ &= \frac{k(n-1)!}{(n-k)!k!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!} = \\ &= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Övning 4.11. (i) Ett grad 2 polynom har formen $f(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$.

Således är

$$\begin{aligned} f(t+1) - f(t) &= a_2(t+1)^2 + a_1(t+1) + a_0 - (a_2t^2 + a_1t + a_0) \\ &= a_2((t^2 + 2t + 1) - t^2) + a_1((t+1) - t) + (a_0 - a_0) \\ &= a_2(2t + 1) + a_1 + 0 \\ &= 2a_2t + (a_1 + a_2). \end{aligned}$$

Detta är ett förstgradspolynom vilket skulle visas.

(ii) För ett grad d polynom har vi istället

$$f(t) = a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \dots + a_1 t + a_0.$$

Egentligen måste vi bara visa att grad d termen i polynomet $f(t+1) - f(t)$ är 0. För det notera att när vi expanderar ut alla parenteser i uttrycket

$$f(t+1) = a_d(t+1)^d + a_{d-1}(t+1)^{d-1} + \dots + a_0$$

så är det endast den första termen som innehåller en multipel av t^d vidare är

$$(t+1)^d = t^d + \text{lägre ordningens termer}$$

så vi får

$$f(t+1) = a_d(t+1)^d + a_{d-1}(t+1)^{d-1} + \dots + a_0 = a_d t^d + b_{d-1} t^{d-1} + \dots + b_1 t + b_0$$

där koefficienterna $b_0, \dots, b_{d-1}$ är reella tal som vi inte behöver bry oss om att räkna ut. Detta ger att

$$\begin{aligned} f(t+1) - f(t) &= (a_d t^d + b_{d-1} t^{d-1} + \dots + b_1 t + b_0) \\ &\quad - (a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \dots + a_1 t + a_0) \\ &= (b_{d-1} - a_{d-1}) t^{d-1} + \dots + (b_1 - a_1) t + (b_0 - a_0). \end{aligned}$$

vilket är ett polynom av grad $\leq d-1$.

Övning 4.13. Vi har att

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{1}{k!} (-n) \cdot (-n-1) \cdot \dots \cdot (-n-(k-1)) \\ &= \frac{1}{k!} \cdot (-1)^k \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+(k-1)). \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

Övning 4.15. (i) Om

$$\frac{1}{1-x} = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

har vi att

$$\frac{1}{1+x} = f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 \dots$$

- (ii) Derivatan av $\ln(x)$ är $\frac{1}{x}$ för $x > 0$. Om $|x| < 1$ är $1 + x > 0$ så därmed ger kedjeregeln att

$$\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{d(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x}.$$

Låt nu

$$\ln(1+x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

vara serieutvecklingen för $\ln(1+x)$. Eftersom att $\ln(1+0) = \ln(1) = 0$ måste vi ha att $a_0 = 0$. För att beräkna de andra koefficienterna noterar vi att $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ och därför är serieutvecklingen för derivatan

$$\frac{d}{dx} \ln(1+x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

Men vi vet att serieutvecklingen för

$$\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

ska vara

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

så

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

För att serierna ska vara lika måste alla koefficienter vara det så vi får

$$(n+1)a_{n+1} = (-1)^n$$

vilket förenklas till

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Således är

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

Övning 5.1. (i)

$$a_5 = 5 \cdot 2 + 1 = 12$$

Femte talet i talföljden är 12.

- (ii) Notera att $n = 0$ ger $a_2 - a_0 = 2 \cdot 0 = 0$ så $a_2 = a_0 + 0 = 1$ och $n = 1$ ger $a_3 - a_1 = 2 \cdot 1 = 2$ så $a_3 = a_1 + 2 = 2 + 2 = 4$. Fjärde talet i talföljden är 4.

Övning 5.3. Vi utvecklar vänsterledet och får

$$\begin{aligned}
 F(t) \cdot (G(t) + H(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \left(\sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n) t^n \right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(b_0 + c_0) + a_{n-1}(b_1 + c_1) + \dots + a_0(b_n + c_n)) t^n = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_n c_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-1} c_1 + \dots + a_0 b_n + a_0 c_n) t^n = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} ((a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n) + (a_n c_0 + a_{n-1} c_1 + \dots + a_0 c_n)) t^n = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n) t^n + \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n c_0 + a_{n-1} c_1 + \dots + a_0 c_n) t^n = \\
 &= F(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot H(t).
 \end{aligned}$$

Övning 5.5. Låt a_n vara icke-negativa heltalslösningar till $x + y = n$. Den genererande funktionen är

$$F(t) = \left(\sum_{x=0}^{\infty} t^x \right) \left(\sum_{y=0}^{\infty} t^y \right) = \sum_{x,y \geq 0} t^x t^y.$$

För varje lösning till ekvationen $x + y = n$ lägger vi på en term $t^x \cdot t^y = t^n$. Antalet gånger vi lägger på t^n är alltså exakt antalet lösningar till $x + 2y = n$ så

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

är den genererande funktionen för talserien $a_0, a_1, a_2, \dots$. Men $\sum_{x=0}^{\infty} t^x = \frac{1}{1-t}$ så $F(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$. Övning 5.15 ger $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) t^n$. Därmed är $a_n = n+1$.

Övning 5.7. Talföljden kan beskrivas av $a_n = 2^{n+1}$. Då är genererande funktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} t^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2t)^n = \frac{2}{1-2t}.$$

Övning 5.9. Eftersom $\sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (at)^n$ så kan vi göra substitutionen $s = at$ och få att

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (at)^n = \sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s} = \frac{1}{1-at}.$$

Övning 5.11. I Övning 5.10 visar vi att $1 - t - t^2 = (1 - \alpha_1 t)(1 - \alpha_2 t)$ där $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ och $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Själv partialbråksuppdelningen går ut på att hitta två konstanter A och B så att

$$\frac{1}{1 - t - t^2} = \frac{A}{1 - \alpha_1 t} + \frac{B}{1 - \alpha_2 t}.$$

Andra delen i Övning 5.10 är att visa att $A = \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}}$ och $B = \frac{-\alpha_2}{\sqrt{5}}$. Således gäller att

$$\frac{1}{1 - t - t^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1 t} - \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2 t} \right).$$

Från Övning 5.9 lånar vi nu det faktum att

$$\frac{1}{1 - \alpha_1 t} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n t^n \quad \text{och} \quad \frac{1}{1 - \alpha_2 t} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_2^n t^n.$$

Det följer att

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - t - t^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha_1 \frac{1}{1 - \alpha_1 t} - \alpha_2 \frac{1}{1 - \alpha_2 t} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n t^n - \alpha_2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_2^n t^n \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha_1 (1 + \alpha_1 t + \alpha_1^2 t^2 + \dots) - \alpha_2 (1 + \alpha_2 t + \alpha_2^2 t^2 + \dots)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} ((\alpha_1 + \alpha_1^2 t + \alpha_1^3 t^2 + \dots) - (\alpha_2 + \alpha_2^2 t + \alpha_2^3 t^2 + \dots)) = \\ &= \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\sqrt{5}} t + \frac{\alpha_1^3 - \alpha_2^3}{\sqrt{5}} t^2 + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\sqrt{5}} \right) t^n. \end{aligned}$$

Övning 5.13. Låt $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ beteckna Fibonaccisekvensen som börjar med $a_0 = 1$ och $a_1 = 1$ och låt $(b_0, b_1, b_2, \dots)$ beteckna Fibonaccisekvensen som börjar med $b_0 = 0$ och $b_1 = 1$. Notera att $b_2 = 1$ så $b_n = a_{n-1}$ för alla $n \geq 1$ eftersom $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$. Om vi inför $a_{-1} = 0 = b_0$ har vi därför följande likhet av genererande funktioner

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} t^n.$$

Vi observerar nu att

$$t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-1} t^k = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n,$$

så eftersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{1-t-t^2}$ måste det gälla att

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = t \cdot \frac{1}{1-t-t^2} = \frac{t}{1-t-t^2}.$$

Övning 5.15. Vi använder samma argument som i Sektion 5.16. Om

$$F(t) = \left(\sum_{x=0}^{\infty} t^{2x} \right) \left(\sum_{y=0}^{\infty} t^{2y} \right) \left(\sum_{z=0}^{\infty} t^z \right) \left(\sum_{w=0}^{\infty} t^w \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

så är a_n antalet positiva heltal som ger $t^{2x+2y+z+w} = t^n$. Det vill säga a_n är antalet positiva heltalslösningar till

$$2x + 2y + z + w = n.$$

Då $\sum_{x=0}^{\infty} t^{px} = \frac{1}{1-t^p}$ får vi därför att

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)^2}.$$

Om a_n är antalet lösningar till

$$px + qy + rz + sw = n$$

blir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{(1-t^p)(1-t^q)(1-t^r)(1-t^s)}$$

med samma argument som ovan.

Övning 5.17. (i) Talet a_n är lika med antalet positiva heltalslösningar till ekvationen

$$1x + 2y + 3z = n$$

där x alltså är antalet enkronor, y är antalet tvåkronor, och z är antalet trekronor. Betrakta nu produkten av genererande funktioner

$$F(t) = \left(\sum_{x=0}^{\infty} t^x \right) \left(\sum_{y=0}^{\infty} t^{2y} \right) \left(\sum_{z=0}^{\infty} t^{3z} \right).$$

Om vi multiplicerar ut dessa uttryck ser vi, precis som i Sektion 5.16, att resultatet blir

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} t^{x+2y+3z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

där a_n är antalet lösningar till $x + 2y + 3z = n$. Slutligen har vi att

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{kn} = \frac{1}{1-t^k}$$

så den genererande funktionen blir

$$\frac{1}{(1-t)} \cdot \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1-t^3}.$$

(ii) Vi har sett att

$$(1 - t^2) = (1 - t)(1 + t) \quad \text{och} \quad (1 - t^3) = (1 - t)(1 + t + t^2)$$

så vi kan skriva om

$$(1 - t)(1 - t^2)(1 - t^3) = (1 - t)^3(1 + t)(1 + t + t^2).$$

Antag nu att

$$\frac{1}{(1 - t)(1 - t^2)(1 - t^3)} = \frac{A}{(1 - t)^3} + \frac{B}{(1 - t)^2} + \frac{C}{1 - t^2} + \frac{D}{1 - t^3}.$$

Om vi multiplicerar båda sidor med $(1 - t)(1 - t^2)(1 - t^3)$ och förenklar får vi

$$1 = A(1+t)(1+t+t^2) + B(1-t)(1+t)(1+t^2) + C(1-t)(1-t^3) + D(1-t)(1-t^2).$$

Efter förenkling ger detta

$$\begin{aligned} 1 = & (-B + C)t^4 \\ & + (A - B - C + D)t^3 \\ & + (2A - D)t^2 \\ & + (2A + B - C + D)t \\ & + (A + B + C + D). \end{aligned}$$

För att detta ska stämma måste vi ha att A, B, C, D uppfyller följande ekvationer

$$\begin{cases} A + B + C + D = 1 \\ 2A + B - C - D = 0 \\ 2A - D = 0 \\ A - B - C + D = 0 \\ -B + C = 0 \end{cases}.$$

Ekvation 1 och ekvation 5 ger $D = 2A$ och $B = C$. Om vi stoppar in detta förenklas de övriga ekvationerna till

$$\begin{cases} 3A + 2B = 1 \\ 2A + B - B - 2A = 0 \\ 3A - 2B = 0 \end{cases}.$$

Ekvation 2 är automatiskt uppfylld här. De övriga ger att lösningen blir $A = \frac{1}{6}$ och $B = \frac{1}{4}$. Därmed får vi att

$$\frac{1}{(1 - t)(1 - t^2)(1 - t^3)} = \frac{1/6}{(1 - t)^3} + \frac{1/4}{(1 - t)^2} + \frac{1/4}{1 - t^2} + \frac{1/3}{1 - t^3}.$$

(iii) Sats 5.3.2 ger att

$$\frac{1}{(1-t)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2+n}{2} t^n, \text{ och } \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1+n}{1} t^n.$$

Vi kan dessutom förenkla

$$\binom{2+n}{2} = \frac{1}{4}(n^2 + 3n + 2), \quad \binom{n+1}{1} = n + 1$$

så därmed är

$$\frac{1}{6} \binom{2+n}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{1} = \frac{1}{12}(n^2 + 6n + 5)$$

vilket ger

$$\frac{1/6}{(1-t)^3} + \frac{1/4}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{12}(n^2 + 6n + 5)t^n.$$

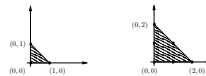
Därmed har vi att om

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \frac{1/6}{(1-t)^3} + \frac{1/4}{(1-t)^2} + \frac{1/4}{1-t^2} + \frac{1/3}{1-t^3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

så är

$$a_n = \begin{cases} \frac{n^2+6n+5}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{n^2+6n+12}{12} & n \text{ delbart med 6} \\ \frac{n^2+6n+5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{n^2+6n+8}{12} & n \text{ delbart med 2 men inte 3} \\ \frac{n^2+6n+5}{12} + \frac{1}{3} = \frac{n^2+6n+9}{12} & n \text{ delbart med 2 men inte 3} \\ \frac{n^2+6n+5}{12} & n \text{ inte delbart med 2 eller 3.} \end{cases}$$

Övning 6.1. (i) Låt oss rita P och $2P$.



Vi ser att P innehåller tre gitterpunkter vilket innebär att $L_P(1) = 3$ och att $2P$ innehåller sex gitterpunkter, så $L_P(2) = 6$.

(ii) Sats 6.1.6 säger att $L_P(n) = a_2 n^2 + a_1 n + 1$ där a_2 är arean av P och a_1 är antal gitterpunkter på randen dividerat med 2. I vårt fall har vi $\text{Area}(P) = \frac{1}{2}$ och $a_1 = \frac{r}{2} = \frac{3}{2}$. Alltså är

$$L_P(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1.$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} L_P(1) &= \frac{1}{2}1^2 + \frac{3}{2}1 + 1 = \frac{4}{2} + 1 = 3, \\ L_P(2) &= \frac{1}{2}2^2 + \frac{3}{2}2 + 1 = \frac{10}{2} + 1 = 6, \\ L_P(3) &= \frac{1}{2}3^2 + \frac{3}{2}3 + 1 = \frac{18}{2} + 1 = 10, \\ L_P(4) &= \frac{1}{2}4^2 + \frac{3}{2}4 + 1 = \frac{28}{2} + 1 = 15. \end{aligned}$$

(iii) Ehrhartserien för P är

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_P(n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \right) t^n.$$

Övning 6.3. Om $\mathbf{x} \in nP = \mathbf{K}(n\mathbf{x}_1, n\mathbf{x}_2, \dots, n\mathbf{x}_k)$ har vi att

$$\mathbf{x} = \lambda_1(n\mathbf{x}_1) + \lambda_2(n\mathbf{x}_2) + \dots + \lambda_k(n\mathbf{x}_k) = (n\lambda_1)\mathbf{x}_1 + (n\lambda_2)\mathbf{x}_2 + \dots + (n\lambda_k)\mathbf{x}_k,$$

där $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ och $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$. Eftersom $n\lambda_1 + n\lambda_2 + \dots + n\lambda_k = n$ om och endast om $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$ drar vi slutsatsen att

$$\mathbf{x} \in nP \iff \mathbf{x} \in \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{x}_k \mid \lambda_i \geq 0 \text{ och } \lambda_1 + \dots + \lambda_k = n\}.$$

Övning 6.5. Från Följdsats 6.1.10 vet vi att $L_T(n) = \binom{3+n}{3}$. Alltså är

$$L_T(6) = \binom{3+6}{3} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84.$$

Övning 6.7. Vi noterar först att om vi skiftar alla hörnen i tetraedern med samma vektor så kommer antalet gitterpunkter i nP inte att ändras. Därför är $L_P(n) = L_Q(n)$ där Q är tetraedern med hörn

$$(0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 3, 1)$$

(alltså hörnen till T förflyttade 3 steg i negativ x -riktning). Sedan noterar vi att en punkt i nQ är på formen

$$(x, y, z) = \lambda_1(0, 0, 0) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(0, 1, 0) + \lambda_4(0, 3, 1) = (\lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4, \lambda_4)$$

där $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = n$. Vi ser direkt att om $(x, y, z) = (\lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4, \lambda_4)$ ska vara en gitterpunkt så måste $\lambda_1 = x$ och $\lambda_4 = z$ vara heltal. Därmed är även $\lambda_2 = y - \lambda_1 - 3\lambda_4$ ett heltal och på samma sätt är också λ_3 ett heltal. Således är

$$L_P(n) = L_Q(n) = \text{antalet positiva heltalslösningar till } \left(\sum_{i=1}^4 \lambda_i = n \right) = \binom{n+3}{3}.$$

Övning 6.9. Samma argument som i Exempel 6.2.4 ger att $L_T(n)$ är antalet heltalslösningar till ekvationen

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} + x_4 = n.$$

Låt a_n vara antalet lösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = n$. Då ger Uppgift 5.16 att

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{(1-t^2)(1-t)^3}.$$

Vi har nu att $L_T(n) = a_{2n}$ så

$$\text{Ehr}_T(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n} = \frac{F(t) + F(-t)}{2}.$$

Samma typ av beräkning som i Exempel 6.2.4 ger

$$\text{Ehr}_T(t^2) = \frac{F(t) + F(-t)}{2} = \frac{1}{2(1-t^2)^4} ((1+t)^3 + (1-t)^3) = \frac{1+3t^2}{(1-t^2)^4}.$$

Detta ger därmed att

$$\text{Ehr}_T(t) = \frac{1+3t}{(1-t)^4}$$

så enligt Sats 5.3.3 är

$$L_T(n) = \binom{n+3}{n} + 3\binom{n+2}{n}.$$

Övning 6.11. Nej! Punkten $(1, 1)$ ligger i figuren så om det vore en kon hade även $3(1, 1) = (3, 3)$ legat i figuren men så är inte fallet.

Övning 7.1. Vi har att $s^{\mathbf{x}} = s^{(1,2,3)} = s_1^1 s_2^2 s_3^3$ och $s^{\mathbf{y}} = s^{(4,5,6)} = s_1^4 s_2^5 s_3^6$ samt att

$$s^{\mathbf{x}} \cdot s^{\mathbf{y}} = s^{(1,2,3)} \cdot s^{(4,5,6)} = s_1^1 s_2^2 s_3^3 \cdot s_1^4 s_2^5 s_3^6 = s_1^{1+4} s_2^{2+5} s_3^{3+6} = s_1^5 s_2^7 s_3^9 = s^{(5,7,9)}.$$

Slutligen är $S_{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}}(s)$ summan av uttryck på formen $s^{\mathbf{p}}$ där $\mathbf{p}$ är en gitterpunkt i mängden $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$. Denna mängd innehåller bara två punkter och båda dessa är gitterpunkter så

$$S_{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}}(s) = s^{\mathbf{x}} + s^{\mathbf{y}} = s_1^1 s_2^2 s_3^3 + s_1^4 s_2^5 s_3^6.$$

Övning 7.3. (i) Enligt Sats 6.1.9 med $n = 2$ finns det

$$\binom{3+2}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 5 \cdot 2 = 10$$

sådana gitterpunkter.

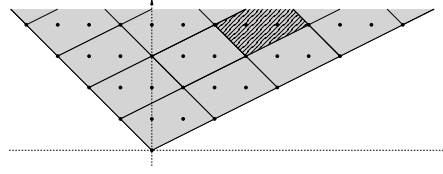
- (ii) Uttrycket $s_1^{x_1} s_2^{x_2} s_3^{x_3}$ är ett monom i variablerna s_1, s_2 och s_3 av grad som mest 2 om och endast om $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ och $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Enligt föregående uppgift finns det 10 olika val för vad x_1, x_2 och x_3 kan vara. En alternativ lösning skulle vara att lista alla sådana monom. De är

$$1, s_1, s_2, s_3, s_1^2, s_1 s_2, s_1 s_3, s_2^2, s_2 s_3, s_3^2$$

vilket är precis 10 stycken.

- (iii) Enligt Sats 6.1.9 finns det $\binom{3+n}{n}$ sådana monom eftersom $s_1^{x_1} s_2^{x_2} s_3^{x_3}$ är ett monom av grad som mest n om och endast om $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ och $x_1 + x_2 + x_3 \leq n$.

Övning 7.5. Parallelogrammen $\{\mathbf{p} + (v_1, 1) + 2(v_2, 1) \mid \mathbf{p} \in Q\}$ är kopian av Q som har sin nedersta punkt i punkten $(v_1, 1) + 2(v_2, 1) = (v_1 + 2v_2, 3)$. Vi markerar därför parallelogrammen som har sin "bas" i denna punkt. (Notera att hela parallelogrammen ej fick plats i figuren.)



Övning 7.7. Från definitionen har vi att

$$\text{Kon}(\mathbf{v}) = \{k(\mathbf{v}, 1) \mid k \geq 0\} = \{(k\mathbf{v}, k) \mid k \geq 0\}.$$

Detta är en linje från origo som passerar genom punkten $(\mathbf{v}, 1)$. För att förenkla notationen skriver vi $P = \{\mathbf{v}\}$. Enligt Sats 6.3.4 är gitterpunkterna i konen på formen $(\mathbf{w}, n)$ där $\mathbf{w} \in nP$ och $n \in \mathbb{N}$. Eftersom $nP = \{n\mathbf{v}\}$ så måste $\mathbf{w} = n\mathbf{v}$. Därmed gäller att gitterpunkterna i konen är $(n\mathbf{v}, n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Detta kan också inses från att k måste vara ett heltal om en punkt $(k\mathbf{v}, k)$ i konen ska vara en gitterpunkt. Om k är ett heltal så är $k\mathbf{v}$ en gitterpunkt så därmed är $(k\mathbf{v}, k)$ med $k \in \mathbb{N}$ de enda gitterpunkterna i konen.

Enligt Hjälpssats 7.1.8 har vi att

$$S_{\text{Kon}(P)}(s, t) = S_{0P}(s)t^0 + S_P(s)t^1 + S_{2P}(s)t^2 + \dots$$

Då $nP = \{n\mathbf{v}\}$ får vi att $S_{nP}(s) = s^{n\mathbf{v}}$. Därmed är

$$S_{\text{Kon}(P)}(s, t) = s^{0\mathbf{v}}t^0 + s^{\mathbf{v}}t^1 + s^{2\mathbf{v}}t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} s^{n\mathbf{v}}t^n.$$

Slutligen ser vi att om vi evaluerar denna summa i $s = 1$ så får vi

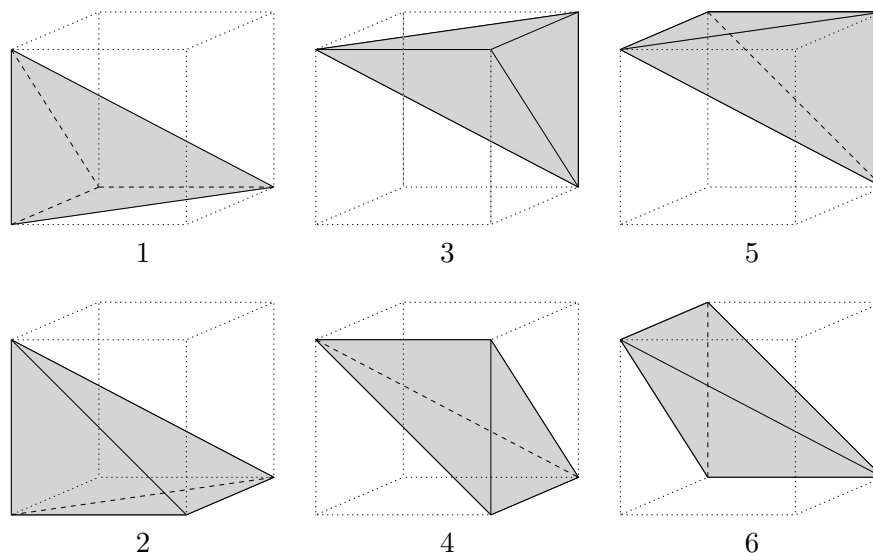
$$S_{\text{Kon}(P)}(1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Övning 7.9. Tag en punkt $\mathbf{x} = \mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$ där $\mathbf{p}$ är en gitterpunkt i Q och $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Vi vill då visa att denna punkt ligger i konen över P . Enligt definitionen för Q har vi att $\mathbf{p} = r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1)$ för några tal r_1, r_2 med $0 \leq r_1, r_2 < 1$. Därmed är

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1) = r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1) + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1) = \\ &= (n_1 + r_1)(v_1, 1) + (n_2 + r_2)(v_2, 1). \end{aligned}$$

Låter vi $k_1 = n_1 + r_1$ och $k_2 = n_2 + r_2$ får vi att $\mathbf{x} = k_1(v_1, 1) + k_2(v_2, 1)$ där $k_1, k_2 \geq 0$. Per definition är därmed $\mathbf{x}$ en punkt i konen.

Övning 8.1. Numrera tetraederarna i trianguleringen från 1 till 6 enligt nedan



Vi kontrollerar nu var och en av skärningarna mellan tetraederna.

- (i) Vi ser att tetraeder 1 skär tetraederna 2 och 6 i en fasett och övriga tetraedrar i en kant.
- (ii) Tetraeder 2 skär, utöver de tidigare nämnda, tetraedern 4 i en fasett, och de övriga i en kant.
- (iii) Tetraeder 3 skär, utöver de tidigare nämnda, tetraederna 4 och 5 i en fasett och tetraeder 6 i en kant.
- (iv) Tetraeder 4 skär, utöver de tidigare nämnda, tetraederna 5 och 6 i en kant.
- (v) Tetraeder 5 skär, utöver de tidigare nämnda, tetraedern 6 i en fasett.

Därmed är alla skärningar av tetraedrar på rätt form.

Övning 8.3. Vi har att

$$a_1 = 3 - a_2 - a_3 \text{ och } a_2 = \frac{3}{2} - 3a_3$$

vilket vi sätter in i ekvationen $27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 19$. Detta ger

$$\begin{aligned} 27a_3 + 9\left(\frac{3}{2} - 3a_3\right) + 3(3 - a_2 - a_3) &= \\ &= 27a_3 + 9\left(\frac{3}{2} - 3a_3\right) + 3\left(3 - \left(\frac{3}{2} - 3a_3\right) - a_3\right) = 19. \end{aligned}$$

Detta är nu bara en ekvation med variabeln a_3 som vi löser:

$$(27 - 9 \cdot 3 + 3 \cdot 2)a_3 + 9 \cdot \frac{3}{2} + 9 - \frac{9}{2} = 19 \iff 6a_3 + 18 = 19 \iff a_3 = \frac{1}{6}.$$

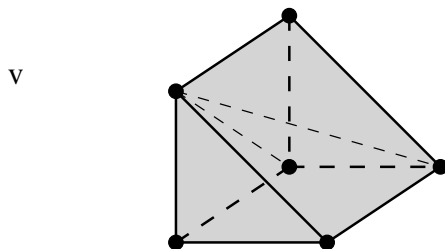
Använder vi att $a_3 = \frac{1}{6}$ i ekvationen $a_2 = \frac{3}{2} - 3a_3$ får vi

$$a_2 = \frac{3}{2} - 3\frac{1}{6} = 1.$$

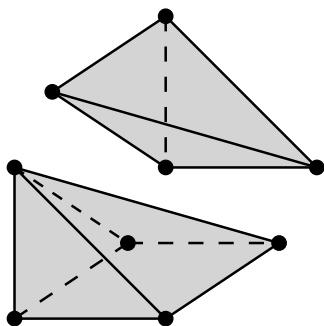
Genom att substituera in $a_2 = 1$ och $a_3 = \frac{1}{6}$ i ekvationen $a_1 = 3 - a_2 - a_3$ får vi att

$$a_1 = 3 - 1 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}.$$

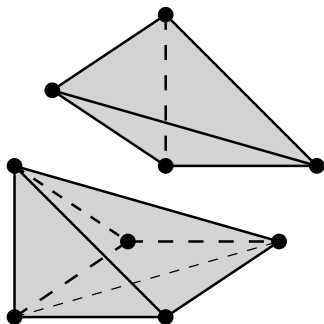
Övning 8.5. Vi börjar med att välja hörnet $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ i P och dra linjer från denna punkt till alla andra hörn i P .



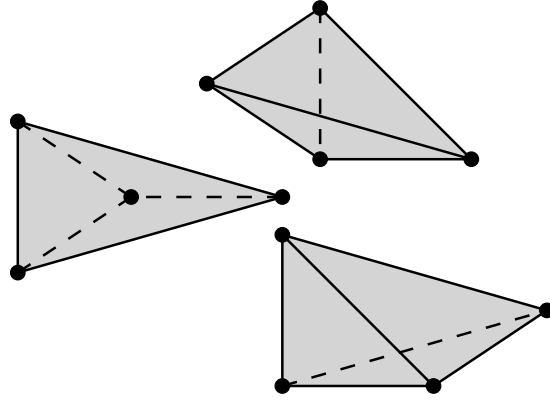
Detta ger en indelning av P i två pyramider.



Den ena pyramiden är en tetraeder och den andra är en pyramid över en kvadrat. Nu triangulerar vi kvadraten genom att välja ett hörn och dra diagonalen från det hörnet till det motstående hörnet i kvadraten.

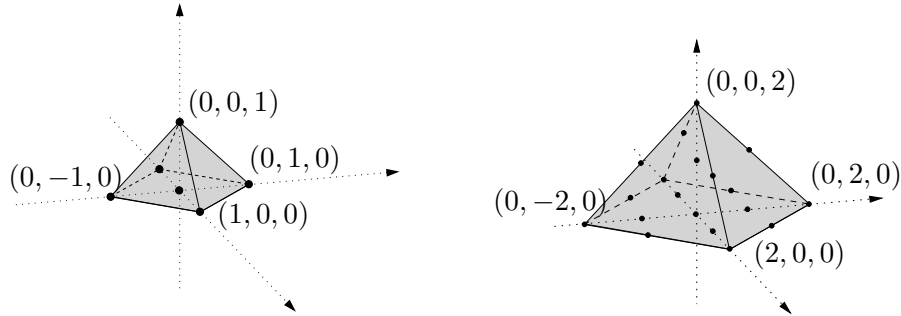


Genom att ta pyramiderna över dessa trianglar skapar vi två nya tetraedrar. Totalt har vi därför delat in vår polyeder i tre tetraedrar som ger en fullständig triangulering av P .



Övning 8.7. (i) P består av fyra kopior av tetraedern T från Övning 8.4. Därför är volymen av P lika med $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.

(ii) Vi börjar med att rita P och $2P$.



Vi ser att P innehåller 6 stycken gitterpunkter,

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1),$$

så $L_P(1) = 6$. Uppförstoringen $2P$ har 19 stycken gitterpunkter:

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0), (1, 0, 0), (2, 0, 0), (-1, 0, 0), (-2, 0, 0), \\ &(0, 1, 0), (0, 2, 0), (0, -1, 0), (0, -2, 0), (1, 1, 0), \\ &(-1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), \\ &(-1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 2). \end{aligned}$$

Därmed är $L_P(2) = 19$. Vi använder oss nu av Sats 8.3.6 för att bestämma $L_P(3)$ enligt nedan.

$$\text{Vol}(P) = \frac{L_P(3)}{6} - \frac{L_P(2)}{2} + \frac{L_P(1)}{2} - \frac{1}{6} \iff \frac{4}{6} = \frac{L_P(3)}{6} - \frac{19}{2} + \frac{6}{2} - \frac{1}{6}.$$

Genom att lösa ut $L_P(3)$ från detta uttryck får vi $L_P(3) = 44$.

- (iii) Koefficienterna a_3, a_2, a_1, a_0 i Ehrhartpolynomet av P kan beräknas med formlerna i Sats 8.2.7 enligt nedan

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= \frac{1}{3}L_P(3) - \frac{3}{2}L_P(2) + 3L_P(1) - \frac{11}{6} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 44 - \frac{3}{2} \cdot 19 + 3 \cdot 6 - \frac{11}{6} = \frac{7}{3} \\ a_2 &= 1 + 2L_P(2) - \frac{5}{2}L_P(1) - \frac{1}{2}L_P(3) = 1 + 2 \cdot 19 - \frac{5}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 44 = 2 \\ a_3 &= \frac{L_P(3)}{6} - \frac{L_P(2)}{2} + \frac{L_P(1)}{2} - \frac{1}{6} = \text{Vol}(P) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Därför ges Ehrhartpolynomet $L_P(n)$ för P av

$$L_P(n) = \frac{2}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{7}{3}n + 1.$$

Övning 8.9. Tag ett linjesegment P i $\mathbb{R}^1$ mellan två gitterpunkter (det vill säga heltal) x och y där $x > y$. Då är antalet gitterpunkter i P lika med $m = x - y + 1$. När vi förlänger P med faktorn n så är det samma sak som att placera n stycken kopior av P i följd. Precis som i Övning 6.6 får vi att antalet gitterpunkter i nP då är $nm - (n - 1) = (m - 1)n + 1$. Detta är sant eftersom alla kopior av P bidrar med m stycken gitterpunkter men att vi då dubbelräknat alla gitterpunkter där två kopior satts ihop, vilket är i precis $n - 1$ punkter. Alltså är $L_P(n) = (m - 1)n + 1$.

Vi noterar att $m - 1 = x - y$ är längden av linjesegmentet P och att längden är den *endimensionella volymen*.

Övning 8.11. (i) Enligt Sats 8.3.6 är

$$\text{Vol}(P) = \frac{L_P(3)}{6} - \frac{L_P(2)}{2} + \frac{L_P(1)}{2} - \frac{1}{6}.$$

Eftersom att $L_P(n)$ är ett heltal för alla n (och $\frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{6}$) är alla termer heltalsmultiplar av $\frac{1}{6}$ så $\text{Vol}(P) = \frac{k}{6}$ där k är ett heltal.

- (ii) Låt P vara en konvex gitterpolyeder av volym $\frac{1}{6}$ och låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ vara 4 olika gitterpunkter i P . Tetraedern T med hörn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$, ligger helt inuti P , alltså $T \subseteq P$ så därmed är

$$\text{Vol}(T) \leq \text{Vol}(P) = \frac{1}{6}.$$

Eftersom att $\text{Vol}(T) \geq \frac{1}{6}$ måste $\text{Vol}(T) = \frac{1}{6}$ så därmed täcker T hela volymen av P , alltså $T = P$. Slutligen, om $T = P$ hade ytterligare en punkt $\mathbf{v}_5$ i sig så hade vi kunnat skapa en ny, mindre, tetraeder H med hörn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_5$. Detta går inte eftersom att vi då skulle få $\text{Vol}(H) < \text{Vol}(P) = \frac{1}{6}$ så därmed har T inga gitterpunkter utöver hörnen.

- (iii) Eftersom att de enda gitterpunkterna i P är dess hörn är $L_P(1) = 4$. Dessutom är inget utav hörnen en inre punkt så P har inga inre punkter och därmed är $L_P(-1) = 0$. Från argumentet i ledningen ser vi att

$$L_P(n) = \frac{1}{6}n^3 + a_2n^2 + a_1n + 1.$$

Om vi stoppar in $n = 1$ i detta uttryck får vi

$$4 = L_P(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + 1$$

vilket förenklas till

$$a_1 + a_2 = \frac{17}{6}$$

och på samma sätt förenklas

$$0 = L_P(-1) = \frac{1}{6} \cdot (-1)^3 + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + 1$$

till ekvationen

$$a_1 - a_2 = \frac{5}{6}.$$

Dessa ekvationer har lösningen $a_1 = \frac{11}{6}$ och $a_2 = 1$ så vi får

$$L_P(n) = \frac{1}{6}n^3 + 6n^2 + \frac{11}{6}n + 1$$

vilket skulle visas.

A Några bevis

A.1 Konvexa höljen och polygoner

Vi såg i Sats 3.2.3 att det konvexa höljet av tre punkter som inte låg på en linje var en triangel med de tre punkterna som hörn. Vi vill här bevisa att det konvexa höljet av n punkter som inte ligger på en linje är en polygon med som mest n hörn om $n > 3$. Vi börjar med att undersöka hur det blir med 4 punkter.

Exempel A.1.1. Betrakta det konvexa höljet $K = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ av fyra punkter $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \mathbb{R}^2$. Utifall någon av de fyra punkterna $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ och $\mathbf{x}_4$ ligger i det konvexa höljet av de övriga tre så kan vi enligt Övning 3.4 uttrycka K som ett konvext hölje av enbart tre punkter. Om till exempel $\mathbf{x}_4 \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ så gäller att $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Eftersom vi redan har studerat konvexa höljen av färre än fyra punkter så antar vi därför att ingen av dessa punkter ligger i det konvexa höljet av de övriga.

En punkt $\mathbf{p}$ i K är på formen

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 + \lambda_4 \mathbf{x}_4$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ och $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$. Precis som i beviset av Sats 3.2.3 så får vi två fall beroende på om λ_4 är 1 eller ej.

Om $\lambda_4 = 1$ så är $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ så $\mathbf{p} = 0\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + 0\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_4$.

Om istället $\lambda_4 \neq 1$ så kan vi skriva

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 = (1 - \lambda_4) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_4} \mathbf{x}_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_4} \mathbf{x}_2 + \frac{\lambda_3}{1 - \lambda_4} \mathbf{x}_3 \right) = (1 - \lambda_4) \mathbf{y}$$

där vi infört beteckningen $\mathbf{y} = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_4} \mathbf{x}_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_4} \mathbf{x}_2 + \frac{\lambda_3}{1 - \lambda_4} \mathbf{x}_3$. I ett försök att förenkla notationen inför vi $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_4}$, $\mu_2 = \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_4}$ och $\mu_3 = \frac{\lambda_3}{1 - \lambda_4}$. Eftersom $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$ och

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_4} + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_4} + \frac{\lambda_3}{1 - \lambda_4} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{1 - \lambda_4} = \frac{1 - \lambda_4}{1 - \lambda_4} = 1$$

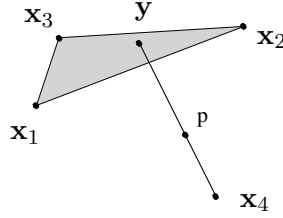
så har vi att $\mathbf{y}$ ligger i det konvexa höljet

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \{\mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \mu_3 \mathbf{x}_3 \mid \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \text{ och } \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1\}.$$

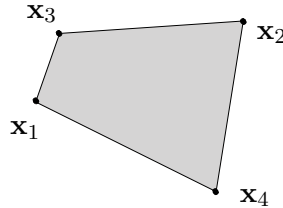
Vi har antagit att ingen av de fyra punkterna ligger i det konvexa höljet av de övriga tre så speciellt gäller att $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ och $\mathbf{x}_3$ inte ligger på en linje. Enligt Sats 3.2.3 är därför detta konvexa hölje lika med triangeln med hörn i $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ och $\mathbf{x}_3$. Då vi kan skriva vår ursprungliga punkt $\mathbf{p}$ som

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 + \lambda_4 \mathbf{x}_4 = (1 - \lambda_4) \mathbf{y} + \lambda_4 \mathbf{x}_4$$

så ser vi att $\mathbf{p}$ ligger i det konvexa höljet av $\mathbf{y}$ och $\mathbf{x}_4$ där $\mathbf{y}$ är en punkt i triangeln $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Eftersom det konvexa höljet av två punkter är ett linjesegment så följer att $\mathbf{p}$ ligger på linjesegmentet mellan $\mathbf{x}_4$ och en punkt i triangeln $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$.



På samma sätt som i beviset av Sats 3.2.3 ser vi att genom att variera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ och λ_4 får vi *alla* punkter på *alla* sådana linjesegment. Därför är det konvexa höljet $K = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ en fyrhörning.



▲

På ett liknande sätt kan vi visa att det konvexa höljet av fem punkter är en polygon med som mest fem hörn. Det blir dock väldigt omständligt att göra detta först för fem punkter, sedan för sex punkter, sedan sju punkter och så vidare. Istället visar vi i nästa sats att motsvarande påstående gäller för n stycken punkter, för *alla* positiva heltal $n \geq 3$.

Sats A.1.2. Låt $n \geq 3$ och låt $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^2$ vara ett antal punkter som inte alla ligger på en linje. Då är $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ en polygon med som mest n stycken hörn.

Bevis. Vi visar detta med en teknik som kallas *induktion*. Det innebär att vi först visar att påståendet är sant för ett basfall, vilket i vårt fall är att ha tre punkter $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ som inte ligger på en linje. Därefter gör vi *antagandet* att påståendet är sant för k stycken punkter där $k \geq 3$ och försöker använda detta antagande för att visa att påståendet i så fall är sant för $k + 1$ stycken punkter. I fall vi har lyckats visa att påståendet är sant för basfallet med 3 punkter så följer det därför att påståendet även är sant för 4 punkter. Om påståendet är sant för 4 punkter så följer det därefter att det är sant för 5 punkter och därför även för 6 punkter, och så vidare.

Nu när vi förklarat metoden så börjar vi med att bevisa att påståendet är sant i basfallet med tre punkter. Enligt Sats 3.2.3 är det konvexa höljet av tre punkter som inte ligger på en linje en triangel vilket är en polygon. Därmed är påståendet sant i basfallet $n = 3$.

Det återstår att visa att satsen är sann för $k + 1$ stycken punkter givet antagandet att satsen är sann för k stycken punkter. Antag därför att satsen är sann för k stycken punkter och att $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}$ är $k + 1$ stycken punkter

som inte alla ligger på en linje. Eftersom inte alla punkterna ligger på en linje så kan vi ordna dem så att åtminstone $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, och $\mathbf{x}_3$ inte ligger på en linje. Låt

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}$$

vara en punkt i det konvexa höljet $K = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1})$. Precis som tidigare får vi två fall.

Om $\lambda_{k+1} = 1$ är $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ så $\mathbf{p} = \mathbf{x}_{k+1}$.

Om $\lambda_{k+1} \neq 1$ kan vi skriva

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = (1 - \lambda_{k+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} \mathbf{x}_k \right) = (1 - \lambda_{k+1}) \mathbf{y}$$

där $\mathbf{y} = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} \mathbf{x}_k$. Låt $\mu_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}}$ för $i = 1, 2, \dots, k$. Då vi har att $\mu_i \geq 0$ för alla $i = 1, 2, \dots, k$ och

$$\mu_1 + \dots + \mu_k = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} = \frac{1 - \lambda_{k+1}}{1 - \lambda_{k+1}} = 1$$

så följer det att $\mathbf{y}$ ligger i det konvexa höljet

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \left\{ \mu_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \mu_k \mathbf{x}_k \mid \mu_1, \dots, \mu_k \geq 0 \text{ och } \sum_{i=1}^k \mu_i = 1 \right\}.$$

Enligt antagandet så är $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ en polygon eftersom det är det konvexa höljet av k stycken punkter som inte alla ligger på en linje då $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ och $\mathbf{x}_3$ inte ligger på en linje. Nu följer det att punkten

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = (1 - \lambda_{k+1}) \mathbf{y} + \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}$$

ligger på linjesegmentet mellan $\mathbf{y}$ och $\mathbf{x}_{k+1}$ och när vi varierar våra λ_i får vi alla möjliga linjesegment från polygonen $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ till punkten $\mathbf{x}_{k+1}$. Detta ger en polygon med som mest $k + 1$ stycken hörn.

Nu följer påståendet för alla $n \geq 3$ genom induktion. □

A.2 Att räkna gitterpunkter i konen över en tetraeder

I Kapitel 6 visade vi Hjälpssats 7.2.1 och Sats 7.2.3 som handlade om att räkna gitterpunkter i konen över ett linjesegment. Följande satser är analoga påstående för att räkna gitterpunkter i konen över en tetraeder. Läsaren uppmanas att jämföra bevisen som följer med bevisen av Hjälpssats 7.2.1 respektive Sats 7.2.3 och notera deras likheter.

Hjälpssats A.2.1. Låt $P = \mathbf{K}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \subset \mathbb{R}^3$ vara en tetraeder. Då kan varje gitterpunkt $\mathbf{x}$ i konen $\text{Kon}(P)$ på ett unikt sätt skrivas som

$$\mathbf{p} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4$$

där $\mathbf{p}$ är en gitterpunkt i mängden

$$Q = \{r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1\}$$

och $\mathbf{x}_i$ är en gitterpunkt i $L_i = \text{Kon}(\mathbf{v}_i)$ för $i = 1, 2, 3, 4$.

Bevis. Från Övning 7.7 gäller det att $\mathbf{x}_i = n_i(\mathbf{v}_i, 1)$ för $i = 1, 2, 3, 4$ där $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$. Först visar vi att varje gitterpunkt $\mathbf{x}$ i konen över P kan skrivas på formen $\mathbf{p} + n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1)$. Därefter visar vi att varje punkt på formen $\mathbf{p} + n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1)$ faktiskt är en gitterpunkt i konen över P .

Tag en gitterpunkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Kon}(P) \cap \mathbb{Z}^4$. Då är

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = k_1(\mathbf{v}_1, 1) + k_2(\mathbf{v}_2, 1) + k_3(\mathbf{v}_3, 1) + k_4(\mathbf{v}_4, 1)$$

för ett unikt val av reella tal $k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 0$. Eftersom k_1 är ett reellt tal kan vi dela upp det i dess heltalsdel n_1 och dess decimaltalsdel $0 \leq r_1 < 1$ så att

$$k_1 = n_1 + r_1.$$

På samma sätt är $k_i = n_i + r_i$, där $n_i \in \mathbb{N}$ och $0 \leq r_i < 1$ för alla $i = 1, 2, 3, 4$. Vi kan nu skriva

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= k_1(\mathbf{v}_1, 1) + k_2(\mathbf{v}_2, 1) + k_3(\mathbf{v}_3, 1) + k_4(\mathbf{v}_4, 1) = \\ &= (n_1 + r_1)(\mathbf{v}_1, 1) + (n_2 + r_2)(\mathbf{v}_2, 1) + (n_3 + r_3)(\mathbf{v}_3, 1) + (n_4 + r_4)(\mathbf{v}_4, 1) = \\ &= (n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1)) + \\ &\quad + (r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1)) \end{aligned}$$

där vi ser att punkten $\mathbf{v} = n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1)$ är en gitterpunkt då dess koordinater är summor av produkter av heltal. Vidare är punkten $\mathbf{p} = r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1)$ per definition en punkt i mängden Q . Då $\mathbf{p}$ är en differens av två gitterpunkter,

$$\mathbf{p} = \mathbf{x} - \mathbf{v},$$

så följer det att även $\mathbf{p} = r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1)$ är en gitterpunkt. Därmed har vi att

$$\mathbf{p} = r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \in Q \cap \mathbb{Z}^4.$$

Således har vi visat att en godtycklig gitterpunkt $\mathbf{x}$ i konen över P kan skrivas på formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1)$$

där $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ och $\mathbf{p}$ är en gitterpunkt i Q .

Slutligen måste vi visa att för varje gitterpunkt $\mathbf{p} \in Q$ och för alla val av $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ gäller att $\mathbf{x} = \mathbf{p} + n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1)$ ligger i konen. På grund av hur mängden Q är definierad har vi att punkten $\mathbf{p}$ kan skrivas på formen $\mathbf{p} = r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1)$ för några tal r_1, r_2, r_3, r_4 med $0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1$. Därmed är

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{p} + n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1) = \\ &= (n_1 + r_1)(\mathbf{v}_1, 1) + (n_2 + r_2)(\mathbf{v}_2, 1) + (n_3 + r_3)(\mathbf{v}_3, 1) + (n_4 + r_4)(\mathbf{v}_4, 1). \end{aligned}$$

Låter vi $k_i = n_i + r_i$ för $i = 1, 2, 3, 4$ får vi att

$$\mathbf{x} = k_1(\mathbf{v}_1, 1) + k_2(\mathbf{v}_2, 1) + k_3(\mathbf{v}_3, 1) + k_4(\mathbf{v}_4, 1)$$

där $k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 0$ så $\mathbf{x}$ är en punkt i konen per definition. $\square$

Sats A.2.2. Låt $P = \mathbf{K}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \subset \mathbb{R}^3$ vara en tetraeder. Om vi inför $L_i = \text{Kon}(\mathbf{v}_i)$ för $i = 1, 2, 3, 4$ så gäller att

$$S_{\text{Kon}(P)}(s, t) = S_Q(s, t) \cdot S_{L_1}(s, t) \cdot S_{L_2}(s, t) \cdot S_{L_3}(s, t) \cdot S_{L_4}(s, t)$$

där $Q = \{r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1\}$.

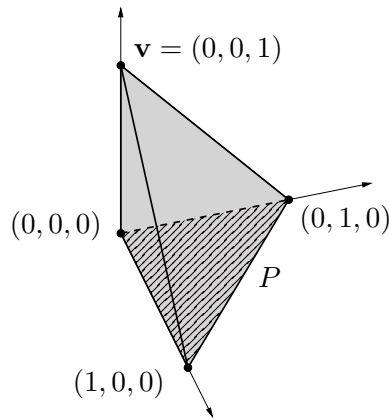
Bevis. Detta följer direkt från Hjälpsats A.2.1. □

A.3 Triangulera en polyeder

Vi kommer i det här kapitlet visa att varje polyeder kan trianguleras, se Definition 8.1.1. För att göra detta börjar vi med att definiera pyramiden över en *polygon* i $\mathbb{R}^3$.

Definition A.3.1. Låt $P = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en *polygon* och låt $\mathbf{v}$ vara en punkt i $\mathbb{R}^3$. Om $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{v})$ är en *polyeder*, och alltså *inte* en polygon, så definierar vi en *pyramid över P* att vara $\mathbf{K}(P \cup \mathbf{v}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{v})$.

Exempel A.3.2. Låt $P = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$ och $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$. Då är $T = \mathbf{K}(P \cup \mathbf{v}) = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ en pyramid över P eftersom T är en tetraeder, vilket är en polyeder.

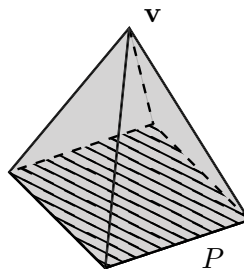


▲

Exempel A.3.3. Låt

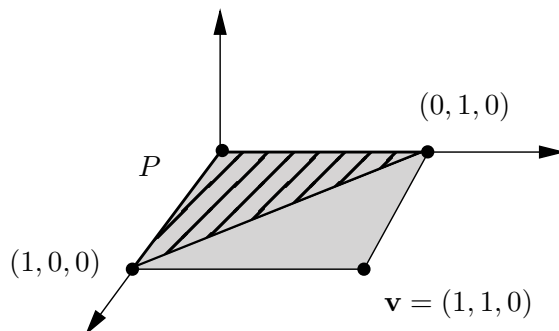
$$P = \mathbf{K}((-1, -1, -1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (1, 1, -1))$$

och $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$. Då är $\mathbf{K}(P \cup \mathbf{v})$ pyramiden över P nedan.





Exempel A.3.4. Låt $P = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$ och $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$. Då är $\mathbf{K}(P \cup \mathbf{v}) = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0))$ en kvadrat, vilket *inte* är en polyeder. Därför är $\mathbf{K}(P \cup \mathbf{v})$ *inte* en pyramid över P eftersom $\mathbf{K}(P \cup \mathbf{v})$ inte är en polyeder.

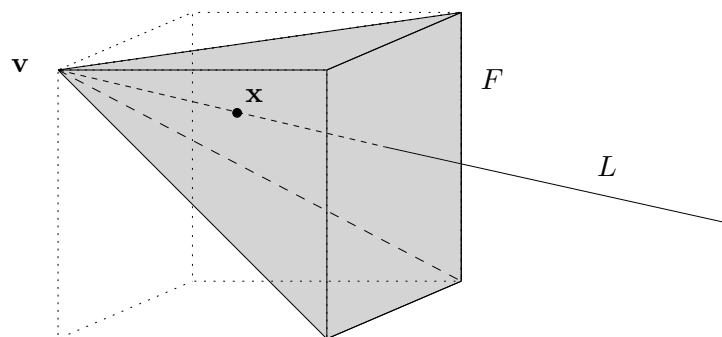


Vi ska nu använda de pyramider vi definierat för att visa att varje polyeder kan trianguleras. Läsaren uppmuntras att läsa igenom Exempel 8.1.4 innan beviset av följande sats eftersom tekniken vi kommer använda är en generalisering av metoden vi använde i det exemplet.

Sats A.3.5. För varje polyeder P finns det en triangulering Δ_P av P så att för varje $T \in \Delta_P$ är hörnen av T också hörn i P .

Bevis. Låt P vara en polyeder. Vi kommer triangulera P genom att först dela in P i pyramider.

För att göra detta väljer vi ett hörn $\mathbf{v}$ i P och konstruerar alla möjliga pyramider på formen $Q_F = \mathbf{K}(F \cup \mathbf{v})$ där F är en fasett av P som inte innehåller $\mathbf{v}$. Vi noterar först att pyramiderna på den här formen ger en uppdelning av P i en union av pyramider. Detta följer av att om $\mathbf{x}$ är någon punkt i P som inte är lika med $\mathbf{v}$ så ligger linjesegmentet L från $\mathbf{v}$ till $\mathbf{x}$ i P eftersom P är konvex. Om vi förlänger linjesegmentet L kommer detta till slut att skära någon fasett F av P som inte innehåller $\mathbf{v}$. Vi illustrerar detta nedan.



Från definitionen av pyramider följer att $\mathbf{x}$ ligger i pyramiden $\mathbf{K}(F \cup \mathbf{v})$. Eftersom $\mathbf{x}$ var godtycklig drar vi slutsatsen att

$$P = Q_{F_1} \cup Q_{F_2} \cup \cdots \cup Q_{F_k}$$

där $F_1, F_2, \dots, F_k$ är fasetterna i P som inte innehåller $\mathbf{v}$.

Givet ovanstående konstruktion räcker det att visa att vi kan triangulera pyramiderna på ett sådant sätt att tetraedrar som ligger i olika pyramider uppfyller det andra kravet i Definition 8.1.1.

Låt därför $Q_F = \mathbf{K}(F \cup \mathbf{v})$ vara en pyramid över en fasett F . Eftersom F är en polygon vet vi från Kapitel 2 att vi kan hitta en triangulering av polygonen F utan att introducera nya hörn. Vi börjar med att välja en sådan triangulering, det vill säga en mängd Δ_F som består av trianglar vars union är F . Tag en triangel $T \in \Delta_F$. Då är $R_T = \mathbf{K}(T \cup \mathbf{v})$ en tetraeder. Vi påstår att mängden $\Delta_{Q_F} = \{R_T = \mathbf{K}(T \cup \mathbf{v}) \mid T \in \Delta_F\}$ är en triangulering av Q_F . För att kontrollera detta påstående behöver vi kontrollera att mängden Δ_{Q_F} uppfyller de båda kraven i Definition 8.1.1.

Vi börjar med att visa att $Q_F = \bigcup_{R_T \in \Delta_{Q_F}} R_T$.

Inklusionen $Q_F \supseteq \bigcup_{R_T \in \Delta_{Q_F}} R_T$ följer av att $Q_F \supseteq R_T$ för alla $R_T \in \Delta_{Q_F}$.

För att visa inklusionen $Q_F \subseteq \bigcup_{R_T \in \Delta_{Q_F}} R_T$ väljer vi en godtycklig punkt $\mathbf{x} \in Q_F$ och visar att $\mathbf{x} \in R_T$ för något R_T . Låter vi F ha hörnen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ så gäller att $Q_F = \mathbf{K}(\mathbf{v}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$. Då $\mathbf{x} \in Q_F$ kan vi därför skriva $\mathbf{x}$ på formen $\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{v} + \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n$ för några $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ med $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$. Om $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ så ligger $\mathbf{x}$ i R_T för alla $R_T \in \Delta_{Q_F}$. Om $\mathbf{x}$ inte är lika med $\mathbf{v}$ så är $\lambda_0 \neq 1$. Vi noterar då att $\mathbf{x}$ kan skrivas som

$$\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{v} + (1 - \lambda_0) \mathbf{y}$$

där $\mathbf{y} = \frac{1}{1 - \lambda_0}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n)$, vilket är samma typ av omskrivning som vi använde oss av i beviset av Sats 3.2.3. Vitsen med omskrivningen är att eftersom $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ så är

$$\frac{1}{1 - \lambda_0}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = \frac{1}{1 - \lambda_0}(1 - \lambda_0) = 1.$$

Med andra ord gäller att $\mathbf{y} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = F$. Då Δ_F är en triangulering av F så betyder det att $\mathbf{y} \in T$ för någon triangel T i Δ_F . Då $\mathbf{x}$ ligger på linjen mellan $\mathbf{y}$ och $\mathbf{v}$ så har vi att $\mathbf{x} \in R_T = \mathbf{K}(T \cup \mathbf{v})$. Detta visar att Δ_{Q_F} uppfyller första delen i definitionen av en triangulering.

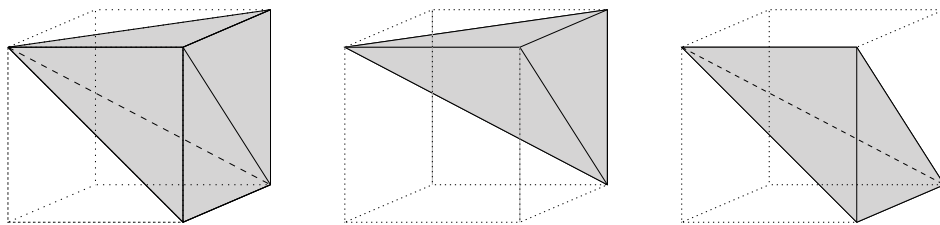
För att kontrollera andra delen i definitionen konstaterar vi att det för varje par $R_1, R_2 \in \Delta_{Q_F}$ gäller att

$$R_1 \cap R_2 = \mathbf{K}((R_1 \cap R_2 \cap F) \cup \mathbf{v}),$$

vilket läsaren kan kontrollera från definitionerna. Vidare är $R_1 \cap R_2 \cap F$ det samma som skärningen mellan två trianglar i trianguleringen Δ_F , så vi har att $R_1 \cap R_2 \cap F$ är en sida av både $R_1 \cap F$ och $R_2 \cap F$. Därför är

$$\mathbf{K}((R_1 \cap R_2 \cap F) \cup \mathbf{v})$$

en sida av både R_1 och R_2 . Detta ger oss en triangulering av pyramiden Q_F . Detta kan illustreras i fallet med en pyramid i en kub då vi får att pyramiden kan trianguleras som i följande figur.



Slutligen behöver vi visa att unionen av trianguleringarna av pyramiderna verkligen är en triangulering av P . Men det följer omedelbart av hur vi konstruerade trianguleringarna av pyramiderna eftersom två tetraedrar från två olika pyramider Q_{F_i} och Q_{F_j} skär varandra om och endast om de skär varandra i $\mathbf{v}$ eller motsvarande fasetter skär varandra i ett hörn eller en kant som ligger i båda tetraederna. $\square$

Förslag till vidare läsning

Det mesta av teorin om Ehrhartpolynom som vi sett i detta kompendium återfinns i boken *Computing the Continuous Discretely* av Beck och Robins. Tyvärr är boken ganska svårläst och kan vara svårtillgänglig om man är ovan vid högre dimensionell geometri. För den som vill veta mer om Ehrhartteori kan speciellt bokens första del vara av intresse. Läsaren kan här hitta många spännande satser som inte fick plats i det här kompendiet.

Biggs bok *Discrete Mathematics* används ofta som kursbok i grundkurser i kombinatorik på högskolan och tar upp flera ämnen inom diskret matematik. Den börjar på samma sätt som detta kompendium med mängdteori och går sedan igenom olika ämnen såsom funktioner, primtal och olika räknetekniker. Därefter förklarar den flera olika algebraiska objekt såsom grupper, ringar och kroppar. Det är en trevlig bok som inte kräver några särskilda förkunskaper.

På KTH finns en kurs i linjär algebra för gymnasister. Det kompendium som används i kursen finns fritt tillgängligt på internet och passar utmärkt som en första introduktion till ämnet. En bra motivation för att lära sig linjär algebra är att ämnet beskriver hur man effektivt löser ekvationssystem av många linjära ekvationer. Sådana kunskaper ger också en djupare förståelse för de uträkningar som dyker upp i det här kompendiets sista kapitel.

Analys i flera variabler av Persson och Böiers går igenom derivator och integraler för funktioner i flera variabler. Speciellt ger boken en ordentlig definition av volymer av kroppar i tre dimensioner. Boken antar att man först läst boken *Analys i en variabel* av samma författare.

- [1] Matthias Beck & Sinai Robins: *Computing the Continuous Discretely*. Springer, 2007
- [2] Norman L. Biggs: *Discrete Mathematics*. 2:a upplagan. Oxford University Press, 2002.
- [3] David Rydh och Roy Skjelnes: *Linjär Algebra - Tio föreläsningar och två efterläsningar*. KTH
- [4] Arne Persson & Lars-Christer Böiers: *Analys i flera variabler*. 3:e upplagan. Studentlitteratur AB, 2005

Böckerna ovan finns att låna på KTH:s huvudbibliotek. Biblioteket är öppet för alla och ligger på Osquars backe 31. Kompendiet *Linjär Algebra - Tio föreläsningar och två efterläsningar* finns tillgängligt på matematikinstitutionens hemsida.

Sakregister

- boll, 42
- cirkelskiva, 17
- Ehrhart
 - funktionen, 77
 - polynom, 101
 - serien, 81
 - Ehrharts sats, 100
- enhetskuben, 78
- euklidiska
 - d -rummet, 46
 - planet, 16
 - rummet, 42
- fasett, 43
- fyrdimensionell kub, 47
- genererande funktionen, 66
- gitter, 25, 42, 46
- höjd, 83
- hörn, 24, 43
- inre punkt, 17, 42
- kant, 24, 43
- kon, 83
- konvex mängd, 18
- konvext hölje, 39
- linjesegment, 17, 47
- mängd
 - konvex, 18
- origo, 17, 42, 46
- Picks sats, 33
- platonsk kropp, 44
- polyeder, 43, 47
 - gitter-, 43
- polygon, 24, 47
 - gitter-, 25
- polytop, 46
 - gitter-, 46
- randen, 18, 43
- randpunkt, 18, 43
- regelbunden
 - polyeder, 44
 - polygon, 25
 - polytop, 48
- rummet, *se* euklidiska rummet
- sida, 43
- talplanet, *se* euklidiska planet
- tetraeder, 44
- triangulering, 32, 97
- uppförstoringen av en polytop, 76
- vikt, 27