Stockholms Matematiska Cirkel
En introduktion till variationskalkyl, läsåret 2022-2023

Linus Bergqvist[1] och Lukas Gustafsson[2]

[1] Stockholms universitet
[2] KTH Royal Institute of Technology

Vad ska vi jobba med i år?

I många olika sammanhang är man intresserad av att optimera en operation som tar någon slags objekt, och ger ett reellt tal. Detta kan till exempel vara operationen som tar en bro över en flod, och ger hur mycket vikt man kan lasta på bron innan den går sönder.

När operationen i fråga är en vanlig funktion, som tar ett reellt tal och ger ett annat reellt tal, så löser man vanligtvis detta optimeringsproblem genom att hitta punkterna där derivatan är 0. Men hur kan man derivera operationen som tar en bro och ger en siffra?

I variationskalkyl angriper vi dessa, mer generella, optimeringsproblem med hjälp av samma idé som ligger bakom satsen som säger att derivatan måste vara 0 i en inre max/min-punkt. Nämligen, att om operationen antar sitt största/minsta värde för ett visst objekt, så kommer varje förändring, varje *variation*, av objektet i fråga resultera i ett mindre/större värde för operationen. Men vad innebär detta för mer generella operationer?

Exempel

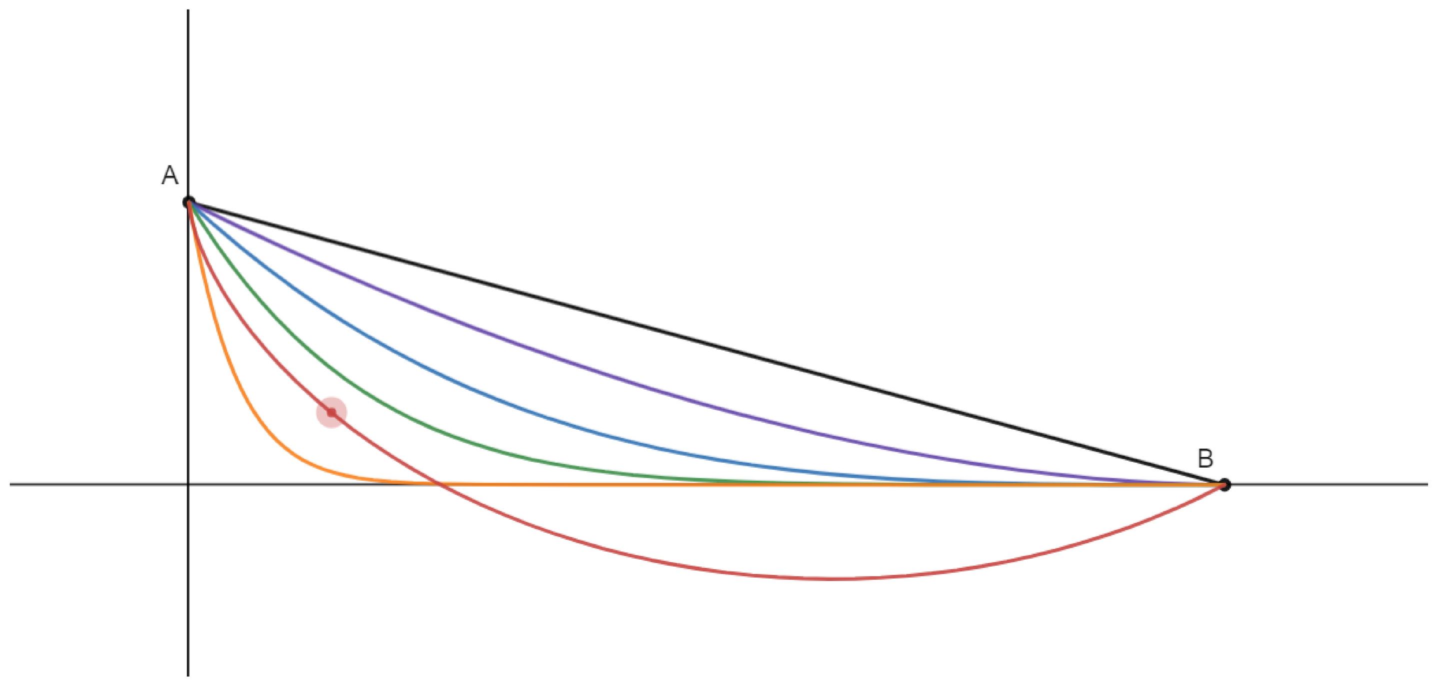
Låt A och B vara två punkter i planet, där B ligger lägre ner än A. Låt nu en kula rulla friktionsfritt längs en kurva från punkt A till punkt B under inflytande av gravitationen. Hur ska kurvan se ut för att kulan ska ta sig från punkt A till punkt B på så kort tid som möjligt? Detta kallas för *Brachistochron-problemet*.

Vi vill alltså hitta minimum till operationen, som vi kallar I, som tar en kurva, som vi kallar K, som förbinder A och B, och ger tiden det tar för en kula att rulla från A till B längs kurvan K.

Vi vet att denna kurva K måste ha egenskapen att *varje* liten deformation av kurvan resulterar i att operationen I antar större värden. Men hur kan vi använda detta för att hitta kurvan K?

För en reell funktion kan vi prata om en förändringshastighet*en*, derivatan i en punkt, just därför att det inte finns särskilt många möjligheter att göra små förändringar av ett reellt tal på; vi kan flytta punkten till vänster och till höger. Men det finns oändligt många sätt att deformera en kurva på! Detta gör Brachistochronproblemet betydligt svårare att lösa.

För en vanlig funktion leder observationen ovan till slutsatsen att en maximipunkt måste vara lösningen till en algebraisk ekvation; nämligen ekvationen att derivatan är noll. För Brachistochron-problemet visar det sig att motsvarande observation innebär att lösningskurvan måste vara lösningen till en speciell differentialekvation!



Figur 1:En graf i Desmos med olika förslag på lösningar till Brachistochron-problemet. Den röda är korrekt.

Cirkeln

Stockholms matematiska cirkel är en årlig föreläsningsserie för gymnasieelever. Med Cirkeln får du möjligheten att se en annan sida av matematikämnet än den man vanligen får se på gymnasiet.

När och var?

Cirkeln träffas på torsdagar varannan vecka. Hälften av träffarna är föreläsningar och hälften övningstillfällen då vi arbetar med övningsuppgifter. Läsåret 2022/2023 kommer Cirkeln att hållas i KTH:s lokaler. Vill du vara med? På många gymnasieskolor kan Cirkeln läsas som en tillvalskurs i matematik. Prata med din gymnasielärare, eller med oss.

Kontakt

Mer information finns på vår hemsida **www.math-stockholm.se/cirkel**
Frågor? Kontakta oss på **cirkel@math-stockholm.se**